UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01573009 6

QA
9
D84
1885
ptie.2

DES

# MÉTHODES

DANS LES

# SCIENCES DE RAISONNEMENT.

3523 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

DES

# MÉTHODES

DANS LES

# SCIENCES DE RAISONNEMENT,

PAR J.-M.-C. DUHAMEL,

Membre de l'Institut (Académie des Sciences),
Professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences,
Membre correspondant de l'Académie de Berlin, de l'Académie de Saint-Pétersbourg,
de la Société impériale des Naturalistes de Moscou, de la Société Philomathique.

## DEUXIÈME PARTIE.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1878

(Tous droits réservés.)

3785
6/6/90
QA
9
D84
1885
ptie 2

# DEUXIÈME PARTIE.

---

## APPLICATION

DES

# MÉTHODES GÉNÉRALES

A LA

## SCIENCE DES NOMBRES

ET A LA

## SCIENCE DE L'ÉTENDUE.

# TABLE DES MATIÈRES

## DEUXIÈME PARTIE.

### APPLICATION DES MÉTHODES GÉNÉRALES A LA SCIENCE DES NOMBRES ET A LA SCIENCE DE L'ÉTENDUE.


Pages.

AVANT-PROPOS ..... XIII

OBJET ET DONNÉES DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ..... 1

Données premières résultant de la nature des nombres..... 2

Données premières de la science de l'étendue..... 4


## SCIENCE DES NOMBRES.

### CHAPITRE PREMIER.


Comment les nombres servent à l'expression des grandeurs. — Leur nomenclature..... 21


### CHAPITRE II.


Des premières opérations sur les nombres, et de quelques théorèmes qui s'y rapportent..... 28


### CHAPITRE III.


Extension de l'idée de nombre. — Raisons et conséquences de cette extension..... 41

## CHAPITRE IV.

Pages.
Extension de la définition des fractions. — Conséquences..... 49

## CHAPITRE V.

Propriétés des fractions égales. — Règles de trois..... 57

## CHAPITRE VI.

Fractions décimales. — Premier exemple de limites de quantités variables..... 61

## CHAPITRE VII.

Extractions des racines. — Nouvelle extension donnée à l'idée de nombre..... 69

## CHAPITRE VIII.

A quoi l'on cherche à ramener la solution de toutes les questions sur les nombres..... 79

## CHAPITRE IX.

Exemples de problèmes simples résolus par la méthode analytique..... 80

## CHAPITRE X.

Signes propres à simplifier le langage et l'écriture..... 91

## CHAPITRE XI.

Des moyens d'obtenir la généralité dans les résultats..... 97

## CHAPITRE XII.

Des opérations sur les quantités dont l'expression est littérale... 104

## CHAPITRE XIII.

De la mise en équation des problèmes, ou de leur réduction au problème général de la résolution des équations..... 110

## CHAPITRE XIV.

Pages.
Des équations du premier degré..... 113

## CHAPITRE XV.

Formules générales pour les divers cas que présentent les équations du premier degré à deux inconnues..... 121

## CHAPITRE XVI.

Généralisation des formules par l'introduction des quantités négatives..... 126

## CHAPITRE XVII.

Autres exemples de généralisation par les quantités négatives.. 133

## CHAPITRE XVIII.

Des quantités négatives se présentant comme solutions..... 144

## CHAPITRE XIX.

De quelques tentatives de démonstration relatives au calcul des quantités négatives..... 161

## CHAPITRE XX.

Des équations du second degré..... 171

## CHAPITRE XXI.

Nouvelle extension donnée aux exposants..... 191

## CHAPITRE XXII.

Variables. — Fonctions. — Continuité..... 195

## CHAPITRE XXIII.

Transformation propre à simplifier les calculs numériques..... 210

## CHAPITRE XXIV.

Pages.

Méthode de transformation des fonctions et des équations, par changement de variables..... 214

## CHAPITRE XXV.

Méthode des coefficients indéterminés..... 221

## CHAPITRE XXVI.

Résolution des équations du troisième et du quatrième degré... 225

## CHAPITRE XXVII.

Des polynômes dérivés..... 238

## CHAPITRE XXVIII.

De la résolution des équations numériques..... 249

## CHAPITRE XXIX.

Quelques problèmes ayant pour objet la détermination d'une fonction, d'après une propriété caractéristique..... 261

## CHAPITRE XXX.

Des séries..... 272

## CHAPITRE XXXI.

De la forme singulière sous laquelle se présente la base du système de logarithmes de Neper, et de la série qui la représente. — Détermination de quelques autres expressions singulières.. 281

## CHAPITRE XXXII.

Développement en série des fonctions $(1+x)^m$ et $\log(1+x)$.. 296

# SCIENCE DE L'ÉTENDUE.

## CHAPITRE PREMIER.

Pages.
Établissement des premières propositions de la Géométrie..... 307
Premiers théorèmes dans les éléments d'Euclide..... 312
Des premières propositions de la Géométrie de Legendre..... 323
Comment nous pensons qu'on pourrait établir les commencements de la Géométrie..... 327
Remarques générales sur les propositions précédentes..... 341

## CHAPITRE II.

Mesure des lignes droites, des angles et des surfaces des polygones rectilignes. — Similitude..... 344
Mesure des lignes droites..... 344
De la plus grande commune mesure..... 346
Mesure des angles..... 347
Mesure des surfaces planes..... 349
Des lignes proportionnelles et des figures semblables..... 354
Autre point de vue et autre définition de la similitude..... 358

## CHAPITRE III.

De la résolution des problèmes. — Exemples..... 360
Réflexions sur la marche analytique suivie dans la résolution des problèmes précédents..... 367
De quelques méthodes pour la résolution des problèmes..... 370
Nouveaux exercices sur la résolution des problèmes..... 372

## CHAPITRE IV.

Des systèmes dont tous les points ne sont pas dans un même plan. 381

## CHAPITRE V.

Des grandeurs dont la comparaison ne se ramène pas directement à la considération de l'égalité. — Méthode des limites. — Méthode des infiniment petits..... 384

Pages.
Surfaces des figures planes non rectilignes..... 384
La surface d'un cercle est la limite de celle de polygones réguliers inscrits..... 385
Les surfaces de deux cercles sont entre elles comme les carrés des rayons..... 387

MÉTHODE DES LIMITES..... 390
Principe fondamental. — Une variable ne peut tendre vers deux limites différentes..... 390
Comment on passe d'une relation entre des variables à une relation entre leurs limites..... 391
En quoi consiste la méthode des limites..... 393
Diverses manières dont les quantités peuvent être considérées comme limites..... 394
Des quantités considérées comme limites de séries..... 395
Des quantités considérées comme limites de sommes d'infiniment petits..... 396
Des grandeurs considérées comme limites de rapports d'infiniment petits..... 397
Principe fondamental des infiniment petits..... 398
La limite de la somme ou du rapport de quantités infiniment petites n'est pas changée lorsque l'on remplace ces quantités par d'autres, dont les rapports avec elles ont respectivement pour limites l'unité..... 398
Autre manière d'énoncer le même principe..... 400
Comment les aires des courbes peuvent toujours être considérées comme limites de sommes d'infiniment petits..... 401
Comment les volumes des corps peuvent toujours être considérés comme limites de sommes d'infiniment petits..... 406

## CHAPITRE VI.

De la longueur des lignes courbes, et de l'aire des surfaces courbes..... 411

## CHAPITRE VII.

Application de la méthode des limites et de la méthode infinitésimale à quelques questions traitées par les anciens..... 422
NOTE SUR L'ÉQUIVALENCE..... 445

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA DEUXIÈME PARTIE.

# AVANT-PROPOS.

Dans la première Partie de cet Ouvrage nous avons dit ce que c'était qu'une science de raisonnement, comment elle se formait, de quelle nature étaient les questions dont elle s'occupait, et quelles méthodes dirigeaient l'esprit dans la recherche de leur résolution. Nous allons maintenant appliquer ces considérations générales aux sciences les plus parfaites, celles dont les données nécessaires sont les plus simples et les mieux assurées, à la *science des nombres* et à la *science de l'étendue*.

Nous prendrons ces sciences à leur origine ; nous établirons leurs données premières, celles qui sont nécessaires et suffisantes pour déterminer la nature des choses dont elles s'occupent, et nous procéderons à leur formation, non pas avec tous les détails que comporterait un Traité spécial, mais de manière à bien faire saisir l'enchaînement des idées, l'ordre dans lequel elles se présentent le plus naturellement, et l'esprit des théories successives dans lesquelles viennent se grouper les propositions qui se rattachent à un même but partiel.

Cet Ouvrage, bien que commençant aux premiers éléments des Mathématiques, n'est donc pas destiné à ceux qui n'en ont encore aucune notion ; il peut con-

venir aux élèves à qui ces matières sont déjà familières, et pour lesquels la partie philosophique de la science a quelque attrait; mais il s'adresse plus particulièrement à ceux qui professent et qui n'ont pas eu le temps de faire toutes les réflexions qui nous ont été suggérées par de longues méditations et par un enseignement de près d'un demi-siècle. Nous y avons suivi l'ordre dans lequel la science doit être exposée, afin que chaque difficulté, s'il y en a, soit prise à sa naissance et éclaircie au moment où elle se produit. Rien n'est plus dangereux que le séjour prolongé d'une idée obscure dans l'esprit; elle y laisse toujours quelque trace, après même que la vérité s'y est fait jour. Il ne faut pas dire aux élèves : *Allez en avant, la foi vous viendra;* il ne faut avancer qu'en s'appuyant sur des précédents sans nuage.

Nous avons dû passer rapidement sur les points qui ne peuvent donner lieu à aucune idée fausse, et insister au contraire, plus même qu'on ne le fait dans les Traités spéciaux, sur ceux où il est possible de s'égarer. Cet Ouvrage n'est donc pas fait pour servir de texte positif à un cours régulier, mais il peut être regardé comme le programme inégalement développé d'un cours; et nous désirerions qu'il pût donner naissance à des Traités complets, où les matières seraient présentées dans le même ordre et dans le même esprit, et où ne se trouveraient pas les lacunes que nous avons laissées à dessein.

# APPLICATION

DES

# MÉTHODES GÉNÉRALES

A LA

# SCIENCE DES NOMBRES

ET A LA

# SCIENCE DE L'ÉTENDUE.

---

## OBJET ET DONNÉES DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES.

---

Les idées les plus simples que font naître en nous les corps qui nous entourent sont celles d'étendue et de pluralité.

Un corps considéré seul nous donne l'idée de l'étendue et de la forme. Des corps distincts et de même espèce nous donnent celle de la *pluralité* ou du *nombre*.

Nous lions d'abord ces idées d'étendue et de forme aux corps qui y ont donné naissance; mais bientôt notre esprit les en dégage et conçoit la forme ou la figure indépendamment de la nature matérielle des corps : cette opération est ce qu'on nomme une *abstraction*.

Nous faisons de même pour la pluralité : nous la concevons indépendamment de l'espèce des objets coexistants,

et l'on peut même dire que, si ces objets n'étaient pas de même espèce, la distinction que nous en faisons suffirait pour nous donner l'idée du nombre, qui naît uniquement de la considération simultanée d'objets distincts. Cette idée du nombre résulte encore, comme on voit, de l'opération de l'esprit que nous nommons *abstraction*.

L'ensemble de tous les rapports nécessaires qui dérivent de la nature des nombres forme, d'après nos définitions générales, ce qu'on doit appeler la *science des nombres*.

L'ensemble des rapports nécessaires qui dérivent de la nature de l'étendue forme la *science de l'étendue,* qu'on appelle aussi la *Géométrie*.

Ces deux sciences réunies constituent ce qu'on appelle les *Mathématiques pures*.

Pour qu'elles soient élevées au rang de ce que nous avons appelé *sciences de raisonnement,* il faut établir d'abord les notions et les données ou axiomes qui fixent la nature des choses dont elles s'occupent, ou sont des vérités évidentes résultant de cette nature, et que nous ne pouvons ramener à d'autres plus simples. C'est ce que nous allons faire brièvement pour chacune de ces deux sciences.

## DONNÉES PREMIÈRES RÉSULTANT DE LA NATURE DES NOMBRES.

1. L'idée des nombres est tellement simple, que les axiomes qui s'y rapportent se réduisent à presque rien et ne sont réellement que le développement naturel de cette idée même.

On formerait toutes les pluralités en partant d'un seul objet qui n'offrît pas l'idée de pluralité, mais de ce que nous appellerons *unité,* puis en lui en joignant un autre, puis un nouveau, et ainsi de suite indéfiniment. Et, comme nous appelons *nombres* toutes ces diverses pluralités, en y com-

prenant même l'unité, on voit que la suite des nombres est illimitée, que le plus petit est l'unité, ou le nombre *un*, et que tous les autres se forment successivement par l'addition constante de l'unité au dernier formé.

2. La première idée qu'on se fait de la pluralité entraîne cette autre que, dans quelque ordre qu'on place les objets et de quelque manière qu'on les partage en groupes séparés, pourvu qu'on n'en retire aucun et qu'on n'en introduise pas de nouveau, la pluralité ne change pas et le nombre reste toujours le même.

3. Si l'on considère deux ensembles différents d'objets et qu'on fasse correspondre, par la pensée ou autrement, un premier objet de l'un avec un premier objet de l'autre, un second avec un second, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un des deux ensembles soit épuisé, il pourra arriver deux cas :

Ou le second sera épuisé en même temps que le premier, et la pluralité sera la même dans les deux : on dira alors que les nombres correspondants sont *égaux ;*

Ou l'un des deux ensembles sera épuisé avant l'autre, et alors on dira que le nombre correspondant à cet autre est *plus grand* que celui qui correspond au premier, et que celui-ci est *plus petit* que l'autre.

4. Si l'on a plusieurs groupes d'objets et qu'on les réunisse tous ensemble, le nombre qui en résultera s'appellera la *somme* des nombres correspondant à ces divers groupes, et l'on dira que ceux-ci ont été *ajoutés* ou *additionnés* entre eux ; on les appellera des *parties* de la somme, qui s'appelle aussi, par rapport à elles, le *total* ou le *tout*. Ce nombre total sera, d'après ce que nous avons dit, indépendant de l'ordre dans lequel on aura réuni ou ajouté tous ces objets et de la manière dont on aura pu fractionner ces groupes

pour les transporter ensemble, soit effectivement, soit simplement par la pensée, pourvu qu'aucun objet ne soit supprimé et aucun nouveau introduit. Le nombre total des objets sera ainsi la somme des nombres partiels correspondant à ces groupes ou à leurs fractionnements arbitraires ; et, comme ce nombre total est invariable, on peut énoncer cette proposition générale :

« De quelque manière qu'on ajoute plusieurs nombres, en les décomposant comme on voudra, on obtiendra toujours la même somme. »

Nous nous bornerons à ces notions bien simples, qui, comme nous l'avons dit, ne sont que des développements de l'idée des nombres et suffisent pour faire de la science des nombres ce que nous avons appelé une *science de raisonnement*.

### DONNÉES PREMIÈRES DE LA SCIENCE DE L'ÉTENDUE.

5. Les corps matériels nous donnent les idées d'étendue, de forme, de situation les uns par rapport aux autres ; et, comme nous l'avons dit, notre esprit peut faire abstraction de tout ce qui tient à leur nature matérielle pour n'y voir que leur figure. Il y conçoit une continuité et une régularité qu'ils sont bien loin d'avoir réellement, et c'est en leur donnant cette perfection idéale qu'il les soumet à ses investigations et forme la science de raisonnement qui s'appelle la *Géométrie*.

Il est dans la nature de l'esprit humain d'aller toujours au delà de ce que les sens lui présentent. Aussi, quoiqu'il ne connaisse par leur moyen que des corps très-limités, conçoit-il la possibilité que ces limites soient beaucoup moins resserrées, et ne voit-il même aucune borne assignable à leur étendue, soit idéale, soit même matérielle.

Cette conception fait naître chez la plupart des hommes l'idée qu'il existe ce qu'ils appellent un *espace indéfini,* indépendant de l'existence d'aucun corps, et qui subsisterait après l'anéantissement complet de tout ce qui est, matériel ou spirituel. Ils se figurent que, par cela seul qu'on admet la possibilité des corps, on doit admettre qu'il y avait de la place pour les recevoir ; et de la pure abstraction qui nous fait concevoir la matière et la figure comme susceptibles d'une étendue sans borne, ils font la réalité d'un être qu'ils nomment l'*espace*. Il est difficile de pousser l'aberration plus loin; et cela est cependant si naturel, que bien peu d'hommes seront d'abord de notre avis sur ce point, qui a déjà été l'objet de bien des controverses.

Mais, si l'on suppose pour un instant que rien n'existe et qu'un corps vienne à être créé, quel obstacle pourrait-il rencontrer? Que pense-t-on quand on dit qu'il fallait une place pour le recevoir? Dès qu'il a été créé, il a une étendue; on peut sans aucun doute faire abstraction de sa matérialité pour ne plus voir que sa figure : on a ainsi une idée d'étendue qu'on pourrait conserver après l'anéantissement de toute matière ; mais ce serait une simple idée existant dans notre esprit et n'ayant aucune réalité en dehors.

Après s'être créé ce fantôme, si l'on vient à y appliquer son attention et à chercher à se rendre compte de son existence, on se trouve saisi d'une sorte d'effroi, comme il arrive toutes les fois qu'on veut sonder quelque mystère impénétrable à l'esprit humain. Un être infini dans tous les sens et indépendant de toute création confond l'imagination; il est aussi difficile à concevoir que Dieu lui-même : néanmoins, personne presque ne doute de son existence; ceux-là même y croient qui ne croient pas à l'existence de Dieu.

Et cependant cet être prétendu n'est que le produit de l'imagination de l'homme; ce qui est vrai, c'est qu'il n'y a pas de limite à l'étendue possible de la création et, par suite,

à l'étendue abstraite des objets créés; et cet espace fantastique, que l'on semble croire destiné à recevoir ces objets, ou même simplement leurs figures, n'est pas une *chose :* c'est l'*absence* de toute chose, c'est le *néant*.

6. La première notion d'étendue que nous recevons des corps solides n'est pas la seule dont ils nous donnent l'idée. La limite de leur étendue, ou leur *surface,* constitue une autre espèce d'étendue d'une nature toute différente, puisque l'intérieur du corps, qui est considéré dans la première, ne l'est pas dans celle-ci. Enfin, si l'on considère une portion de la surface d'un corps, elle est terminée par ce que l'on appelle une *ligne,* et la ligne donne l'idée d'une nouvelle espèce d'étendue entièrement différente des deux autres. Si l'on considère une portion de ligne, les limites de son étendue, ou ses extrémités, n'offrent l'idée d'aucune espèce d'étendue et se nomment des *points*. Ces trois sortes d'étendue portent les noms d'étendue en *solidité* ou *volume*, en *surface* et en *ligne*. On les comprend toutes sous la dénomination de *grandeurs géométriques*.

7. Deux grandeurs géométriques, de quelque espèce qu'elles soient, sont dites *égales,* lorsqu'on peut transporter l'une des deux, en ne changeant rien en elle, de manière qu'elle coïncide complétement avec l'autre. Cette translation offrirait des difficultés et même des impossibilités dans le cas des corps solides, si l'on n'avait pas fait abstraction de leurs propriétés matérielles, et particulièrement de l'impénétrabilité. Nous ne considérons que la figure des corps, des surfaces et des lignes, et ces images idéales ne peuvent offrir aucun obstacle à la pénétration.

Lorsqu'une quantité se compose d'une quantité égale à une seconde et d'un reste quelconque, on dit qu'elle est *plus grande* que la seconde; la seconde est dite *plus petite* que

la première et s'appelle aussi une *partie* de la première. Une grandeur, relativement aux parties dont elle est formée, se nomme un *tout;* elle est dite la *somme* des différentes grandeurs qui la constituent.

Ainsi, d'après le sens que nous attachons aux mots *tout, partie, plus grand, plus petit,* on voit qu'un *tout est plus grand qu'une de ses parties,* ou que *la partie est plus petite que le tout.* C'est donc à tort qu'on fait de cette proposition un axiome fondamental, que quelques auteurs des Traités de Géométrie demandent qu'on admette comme évident et placent au milieu de leurs *postulata* ou vérités indémontrables. Cette méprise, un peu forte il est vrai, consiste à prendre pour une *vérité de sentiment* ce qui n'est qu'une *vérité de définition.*

8. Nous nous occuperons d'abord de l'étendue ou de la figure dans le cas le plus simple, le plus réduit, dans le cas des lignes.

De toutes les lignes, celle qui présente la figure la plus simple, et dont la considération se présente le plus souvent dans la Géométrie, est la ligne *droite :* on en a donné des définitions assez diverses.

Les auteurs les plus célèbres de nos jours appellent ligne droite *la plus courte ligne qui puisse être menée d'un point à un autre,* définition qui est entièrement défectueuse. En effet, elle ramène une notion à d'autres que l'on n'a pas, et qui sont beaucoup moins simples que la première. Qu'entend-on, en effet, par une ligne plus grande qu'une autre? C'est celle qui se compose d'une partie égale à la première et d'un reste quelconque. Or deux lignes égales sont celles qui peuvent coïncider, et par conséquent l'égalité ne peut être conçue entre deux lignes dont la figure ne se prête pas à la superposition. Quelle idée peut-on se faire alors de cette définition donnée au commencement même de la

Science, lorsque l'on n'a pu encore faire savoir ce que l'on appelle *lignes d'égale longueur,* dans le cas où il ne peut y avoir coïncidence? Nous rejetons donc entièrement cette définition, qui a encore l'inconvénient de ne donner aucune idée de la figure de la ligne droite à ceux qui ne l'auraient pas déjà.

9. Euclide n'était pas tombé dans cette faute et n'avait pas introduit dans sa définition la considération de la longueur; mais elle pèche un peu par la clarté et a pu donner lieu à des interprétations diverses. La ligne droite, dit-il, est celle qui ἐξ ἴσου κεῖται ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις, c'est-à-dire qui repose également sur ses points. Or que faut-il entendre par là? Veut-il dire que, si l'on considère deux quelconques de ses points, elle ne pourrait être posée sur eux de plusieurs manières différentes, de sorte que, par deux de ses points, on ne peut concevoir une seconde ligne droite? Supposera-t-on, au contraire, que cette similitude entre ses points se rapporte aux différentes parties de la droite? Cela n'est pas vraisemblable; car cette identité de forme dans toute l'étendue d'une ligne s'appliquerait aussi bien au cercle et à l'hélice qu'à la ligne droite. Ce qui est bien certain, au reste, c'est qu'il n'y a rien dans cette définition qui puisse faire supposer qu'Euclide considérait la droite comme la ligne la plus courte qu'on puisse mener entre deux quelconques de ses points; et cela est d'autant plus certain, qu'il démontre plus tard très-rigoureusement que toute ligne droite est plus petite qu'une ligne brisée terminée à ses deux extrémités. Ajoutons enfin qu'Archimède a mis au nombre des principes que la ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités, et que la ligne concave est plus courte que toute ligne qui l'enveloppe; ce qui montre bien qu'il ne regardait pas la ligne droite comme ayant été définie par cette propriété.

Nous sommes porté à admettre la première explication, et nous croirons être d'accord avec Euclide en appelant *ligne droite une ligne indéfinie telle, que par deux points donnés on n'en peut faire passer qu'une seule.*

Et cette propriété que nous prenons pour définition d'une forme particulière de lignes entraîne cette autre, que, si l'on en prend une portion quelconque et qu'on la transporte de manière que les deux extrémités soient tout autre part sur la même ligne, les deux portions comprises entre ces deux points coïncideront, et la forme de cette ligne est partout la même.

La définition que nous adoptons a l'avantage de donner une idée bien nette de cette forme. Il suffit de se représenter une ligne dont deux points resteraient les mêmes, et qu'on essayerait de déplacer d'une manière quelconque. On aura bientôt exclu toutes les formes qui ne satisferaient pas à la condition de coïncidence constante exigée par la définition, et il ne restera comme y satisfaisant que cette ligne dont tout le monde a le sentiment bien avant d'en avoir une définition.

Toute ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites s'appelle *ligne courbe,* ou simplement *courbe.*

10. A partir d'un point d'une droite, on peut considérer deux côtés différents donnant lieu à ce qu'on appelle les *directions opposées* de la droite en ce point. La tendance naturelle de l'homme à rapporter tout à lui-même fait souvent désigner ces deux directions par les noms de *gauche* et *droite,* et, dans certains cas, cette image contribue à donner une idée claire des positions ou des mouvements.

11. Toutes les droites indéfinies coïncidant quand elles ont deux points communs, rien n'est plus facile que de porter sur une droite indéfinie, à partir d'un de ses points et

dans le même sens, des droites égales à des droites données. C'est ce qu'on appelle *ajouter les longueurs* de ces lignes; et l'on dit que la droite comprise entre les deux points extrêmes a une *longueur* égale à la somme de toutes les autres.

12. *Remarque.* — Nous avons compris dans la définition de la ligne droite ces deux propriétés, que, lorsque deux de ses points sont fixés, la ligne ne peut avoir qu'une seule position tant entre ces deux points qu'au delà; mais il serait possible de rendre sensible que la seconde propriété est renfermée dans la première. Concevons, en effet, que deux droites qui ont deux points communs ne coïncident pas au delà, et prenons sur l'une un point qui ne soit pas sur l'autre. On pourra amener ce point sur cette dernière par un déplacement de la première droite autour du point commun le plus éloigné, et l'on juge avec assez d'évidence que, dans ce déplacement, les points qui étaient d'abord communs ne le seront plus, et qu'il y aurait par conséquent deux lignes droites différentes entre le point resté fixe et celui qu'on a rendu commun aux deux proposées; or cela serait contraire à la définition de la ligne droite.

Mais le sentiment qu'on a de la justesse de ces considérations ne nous paraît propre qu'à produire une confirmation, et non une véritable démonstration. Nous croyons convenable de renfermer dans l'idée de la ligne droite la propriété de coïncidence indéfinie de deux droites qui auraient deux points communs.

13. Lorsque deux droites se rencontrent en un point, elles donnent une nouvelle idée, qui est celle d'*inclinaison* mutuelle ou d'*angle*. Nous croyons qu'il n'est pas à propos de définir cette idée, parce qu'elle ne saurait être ramenée à d'autres plus simples, ou seulement bien définies avant

elle; mais il faut bien savoir que, dans la recherche des rapports des *grandeurs* ou *quantités* quelconques, l'important n'est pas de fixer l'idée des choses au moyen d'une phrase, quand cette idée est si bien conçue, qu'elle ne peut donner lieu à aucune méprise. L'important est de définir clairement l'égalité et l'addition de ces choses, et cela est suffisant en même temps que nécessaire pour les comparaisons. Nous ne dirons donc pas ce que c'est qu'un angle, mais ce qu'on appelle *angles égaux*.

« On dit que deux droites qui se rencontrent font le même angle que deux autres qui se rencontrent en un autre point, quand on peut, en transportant l'un de ces deux systèmes, sans y rien changer, faire coïncider les directions de ses deux lignes avec les directions de celles de l'autre. »

Il faut bien remarquer que cette égalité est indépendante de celle des lignes des deux systèmes.

Du reste, c'est pour la commodité du langage qu'on introduit le mot *angle*, et l'on pourrait énoncer toutes les propositions où il entre, en le remplaçant par les conditions qu'il sert à exprimer. Cette remarque peut se faire, à la vérité, pour toutes les définitions, mais on aurait tort de se priver de l'avantage qu'elles donnent au langage lorsqu'elles ne sont pas défectueuses.

Nous définirons tout à l'heure l'addition des angles, et ce qu'on entend par angles plus petits ou plus grands.

Il est un cas remarquable d'égalité d'angles sur lequel nous croyons devoir dès à présent appeler l'attention : c'est celui où ces deux angles sont ceux qu'une droite qui en rencontre une autre forme avec les deux côtés de cette dernière. Nous regardons comme évidente la possibilité de cette position relative de deux lignes. On dit dans ce cas que la première est *perpendiculaire* sur la seconde, et qu'elle fait avec elle des angles *droits*.

14. Les surfaces, dont la forme peut varier à l'infini, offrent aussi un cas particulier très-remarquable, qui est en quelque sorte pour les surfaces ce que la droite est pour les lignes : c'est ce qu'on nomme le *plan*.

On le définit ordinairement : *une surface telle, que si l'on fait passer une droite par deux quelconques de ses points, cette droite indéfinie est entièrement comprise dans la surface.*

Cette définition, outre qu'elle ne donne pas une idée bien nette de la forme de cette surface, a l'inconvénient d'exprimer un nombre indéfini de conditions peut-être incompatibles. Existe-t-il une surface sur laquelle une droite puisse s'appliquer indéfiniment, quels que soient les deux points qu'on ait choisis pour la déterminer? Cette infinité de conditions imposées à cette surface la rend-elle impossible? Son existence est-elle une vérité première, qu'on doive admettre comme évidente, comme un axiome?

Nous ne partageons pas à cet égard le sentiment commun, et nous pensons que l'admission de cette surface peut être ramenée à quelque chose de plus évident et de moins hypothétique que le simple énoncé de cette définition.

Concevons, en effet, une ligne droite quelconque, et en un de ses points élevons une perpendiculaire. Supposons que cette seconde ligne prenne d'une manière continue toutes les positions possibles, en passant toujours par le même point et restant perpendiculaire à la première. Il est certainement plus facile de se représenter la surface lieu de toutes ces perpendiculaires, ou, par une image empruntée au mouvement, la surface engendrée par une droite perpendiculaire à la première et tournant autour d'elle en passant toujours par un même de ses points, que d'admettre *a priori* qu'il existe une surface telle, que la droite qui passe par deux quelconques de ses points y soit comprise tout entière. Or on peut facilement s'assurer que le

lieu dont nous venons d'indiquer la génération jouira de cette propriété.

Remarquons d'abord l'identité de forme de la surface considérée de ses deux côtés. Si, en effet, on la retourne et qu'on fasse coïncider chacune des directions de la première droite transportée avec elle avec la direction opposée à partir du point fixe, elle coïncidera avec sa première position, puisqu'elles seront l'une et l'autre le lieu des perpendiculaires à une même droite par le même point.

Il est de plus évident que cette surface coïncidera toujours avec elle-même si on la déplace de manière que les perpendiculaires qui l'ont engendrée restent perpendiculaires à l'axe fixe.

Cela posé, considérons deux points quelconques sur cette surface ; faisons passer par ces points une ligne droite indéfinie, et suivons-la à partir d'un de ces deux points en marchant vers l'autre. Comme, par sa définition, elle est semblable de tous les côtés, et que le plan n'offre lui-même aucune dissemblance entre ces deux faces, de quel côté de la surface peut-on concevoir que passe d'abord la droite? Et elle ne peut passer des deux côtés à la fois, parce qu'alors, quand on serait arrivé au second point donné, on aurait deux lignes droites passant par les deux mêmes points, ce qui est admis impossible.

Comment donc n'admettrait-on pas comme évident qu'entre ces deux points la droite est tout entière dans la surface? Et l'on admettra aussi qu'elle n'en peut sortir au delà ; car, par les raisons déjà données, si elle passait d'un côté, on serait fondé à admettre qu'elle passe de l'autre, et l'on aurait encore deux droites différentes qui auraient deux points communs, ce qui est contraire à la définition.

Toutes ces idées et ces propositions sont nettement indiquées, et leur admission ne semble pouvoir être l'objet d'aucune difficulté ; tandis que l'idée du plan tel qu'on le

définissait est très-confuse et renferme tant de conditions, qu'on ne voit nullement qu'elles soient compatibles.

Le lieu dont nous venons d'indiquer la génération, et dont l'existence est incontestable, jouit donc de la propriété que, si l'on joint deux quelconques de ses points par une droite indéfinie, cette droite aura tous ses points sur la surface.

Et de là résulte, comme conséquence nécessaire, que toute droite indéfinie qui passe par un point qui n'appartient pas à ce lieu ne peut avoir qu'un seul point commun avec lui; car, si elle en avait deux, tous ses points devraient y être, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Cette remarque fait voir bien clairement que le lieu en question n'est nullement un corps solide; car une droite menée par un point extérieur à un corps peut, en le pénétrant, avoir avec lui un nombre indéfini de points communs. Ce lieu ne peut donc être rangé que parmi les surfaces, comme cela paraissait d'ailleurs bien évident.

15. La propriété remarquable que nous venons de déduire de la génération de cette surface est-elle réciproque? c'est-à-dire toute surface telle, que, si l'on en joint deux points par une droite, cette droite soit tout entière dans cette surface, est-elle le lieu des perpendiculaires à une droite, menées par un de ces points?

Pour résoudre cette question, dont on sentira bientôt l'importance, concevons deux surfaces quelconques jouissant de la propriété supposée, et dans l'une d'elles prenons arbitrairement trois points non en ligne droite. Transportons cette surface de manière que l'un de ces trois points se trouve placé sur l'autre; puis, sans déranger ce premier point, faisons tourner la surface transportée de manière qu'un des deux autres points arrive à se trouver dans celle qui est restée fixe; et enfin, laissant ces deux premiers

points à la place qu'ils occupent, ce qui *évidemment* ne fixe pas la position de la surface que nous déplaçons, faisons encore mouvoir cette dernière de manière que le troisième point se trouve dans l'autre. Il est facile de démontrer qu'alors tous les points des deux surfaces coïncident.

On voit d'abord que les trois droites qui joignent ces trois points deux à deux sont dans les deux surfaces ; de sorte que, au lieu de prendre trois points dans l'une, on eût pu indifféremment prendre deux de ces droites, ou même toutes les trois.

Considérons maintenant un point quelconque sur l'une des surfaces indéfinies, et prouvons qu'il est aussi sur l'autre.

Pour cela, menons par ce point une droite indéfinie dans les deux sens, qui passe par un autre point quelconque de la même surface, pris dans l'intérieur du triangle déterminé par les trois droites. Cette nouvelle droite rencontrera nécessairement deux de ces dernières; car il est évident que, prolongée indéfiniment dans les deux directions à partir du point intérieur, elle sortira des deux côtés hors de la partie de la surface occupée par le triangle, et rencontrera son contour en deux points. Et ceux qui éprouveraient quelque difficulté à cet égard en éprouveraient bien davantage à l'admission de la définition ci-dessus mentionnée. Ces deux points de rencontre seront dans les deux surfaces, puisqu'elles renferment les deux droites rencontrées : la nouvelle droite sera donc aussi tout entière dans ces deux surfaces, et, par conséquent, le point par lequel nous l'avons menée y sera aussi. Tout point de l'une des surfaces étant sur l'autre, les deux surfaces coïncident.

Il est donc démontré que, si deux surfaces jouissent chacune de la propriété de renfermer tous les points de la droite menée par deux quelconques de leurs points, elles peuvent coïncider complétement en transportant l'une

d'elles de manière que trois points non en ligne droite, pris arbitrairement sur elle, viennent s'appliquer sur l'autre, n'importe dans quelle partie. Et, comme on peut prendre pour seconde surface la première que l'on déplacerait, il s'ensuit que celle-ci peut être retournée et glisser sur elle-même sans cesser de coïncider, pourvu que trois de ses points, non en ligne droite, restent toujours sur la première immobile. Cette surface est donc partout identique, et des deux côtés; elle est donc parmi toutes les surfaces ce que la droite est parmi les lignes.

La surface lieu des perpendiculaires en un même point d'une droite, jouissant de la propriété que toute droite qui joint deux de ses points y est tout entière, coïncidera donc avec elle-même de quelque manière qu'on la fasse glisser, pourvu que trois de ses points, non en ligne droite, restent toujours dans sa première situation. On peut donc la regarder comme le lieu des perpendiculaires en un même point d'une droite, menée par un quelconque de ses points.

Cette surface unique, identique à elle-même dans toutes ses parties et d'un côté quelconque, peut être définie par la génération que nous en avons donnée, ou encore, après les démonstrations précédentes, par la propriété réciproque que nous en avons déduite; nous lui donnerons le nom de *plan*.

16. La notion du plan étant admise, nous pourrons définir l'addition des angles, dont nous avons défini l'égalité. Pour *ajouter* deux angles, nous plaçons sur un même plan les deux systèmes de lignes qui les forment, de manière que les points où leurs côtés se rencontrent, ou leurs *sommets*, coïncident; nous plaçons l'une sur l'autre deux des lignes qui les forment, de telle manière que les deux autres lignes soient de côtés différents de la ligne commune; cela fait, ces deux dernières lignes, quelle que soit leur position

relative, sont dites faire entre elles un angle égal à la *somme* des deux autres ; ou, en employant un langage qui sera dans la suite plus commode, nous dirons que l'angle des côtés extrêmes est égal à la somme des deux autres. On peut ajouter ainsi autant d'angles que l'on voudra, en tournant toujours dans le même sens. Le dernier côté pourra dépasser le prolongement du premier ; il pourra revenir dans la direction de ce premier côté, et même, par l'addition continuée de nouveaux angles dans le même sens, repasser un nombre quelconque de fois par cette première direction ; de sorte que l'on pourra avoir une somme d'angles, ou, comme nous l'avons dit, un angle indéfiniment croissant.

17. Si par le sommet d'un angle on mène, entre ses deux côtés et dans le plan qui les contient, tant de droites qu'on voudra, ces droites consécutives formeront des angles, dont l'angle proposé sera la somme et qui seront les parties de cet angle total.

18. Nous nous bornons pour l'instant à ces premières notions, et nous allons montrer comment les commencements de la Science peuvent être fondés sur elles. Ce ne sont pas les seules que nous serons obligés d'admettre par le simple sentiment de l'évidence ; mais il n'y aurait aucun avantage à en parler quand le besoin ne s'en fait pas sentir, et il vaut mieux attendre, pour les énoncer, que l'application qu'on aura à en faire leur donne un intérêt qu'elles n'auraient pas eu auparavant ; et si, parmi ces vérités qu'on n'a pu ramener à d'autres plus simples et qu'on présente à l'acceptation immédiate de tous les hommes, il s'en trouve qui aient une apparence un peu hypothétique et qui ne frappent pas par un caractère assez éclatant d'évidence, il faudra, si l'on n'a pas assez de hardiesse d'esprit pour

franchir le passage avec confiance, s'arrêter à ce point douteux, ou tout au moins n'aller au delà qu'en faisant ses réserves.

Les vérités fondées sur ces notions premières sont en nombre illimité, parce que chacune de celles que l'on découvre peut donner lieu à des combinaisons nouvelles, d'où résulteront de nouvelles conséquences, et ainsi de suite indéfiniment.

Les Sciences ont donc une étendue à laquelle l'homme ne peut affirmer qu'il y ait des bornes, et cependant il en connaît et possède les bases ; tout ce qu'elles renferment est virtuellement compris dans ce petit nombre de principes dont il a le sentiment clair et distinct; et ce sentiment commun à tous les hommes, sur des choses en dehors d'eux-mêmes, doit être regardé comme l'attestation de la réalité de ces choses, si l'on admet que le Créateur des hommes n'a pas voulu qu'ils fussent tous et toujours le jouet des mêmes illusions.

# SCIENCE DES NOMBRES.

# SCIENCE DES NOMBRES.

## CHAPITRE PREMIER.

### COMMENT LES NOMBRES SERVENT A L'EXPRESSION DES GRANDEURS. — LEUR NOMENCLATURE.

19. Les plus simples relations des hommes entre eux ont de tout temps nécessité l'emploi des nombres. A mesure que ces relations se sont compliquées, que les échanges sont devenus plus multipliés et plus variés par le progrès de l'industrie, que les communications entre les peuples se sont plus étendues, l'emploi des nombres est devenu de plus en plus indispensable, et l'on peut même dire que sans eux presque toutes les relations commerciales seraient impossibles.

Et, en effet, toutes les quantités ou grandeurs qui sont utiles à l'homme et peuvent devenir l'objet de ses transactions sont de celles où l'on peut concevoir l'égalité et l'addition. Or, si l'on choisit une quantité bien déterminée dans chaque espèce et connue de tous les hommes, il est facile de voir comment ils peuvent se donner connaissance les uns aux autres de toute quantité de cette espèce, qu'ils ne peuvent montrer, soit à cause d'impossibilités matérielles, soit parce que la vue n'en donnerait qu'une notion imparfaite et inutile. Pour y parvenir, on compa-

rera la quantité à évaluer à celle qui est connue de tous et qu'on appelle l'*unité de cette espèce;* on cherchera, par des procédés dépendant de la nature de cette quantité, combien de fois elle contient l'unité, et ce nombre en donnera la *mesure,* la connaissance exacte, si elle a été ainsi entièrement épuisée.

Mais si, après avoir ôté de la quantité à évaluer autant d'unités entières qu'elle en renferme, il y avait en outre un reste moindre que l'unité, on le comparerait à une subdivision de l'unité en un nombre déterminé de parties égales, dont l'une serait employée comme l'avait été premièrement l'unité entière. Si, après cette seconde opération, il y avait encore un reste, on le mesurerait avec une subdivision de la première subdvision de l'unité, et l'on continuerait ainsi jusqu'à l'entier épuisement de la quantité qu'on veut évaluer. Dans la pratique, cette suite d'opérations a toujours une fin, parce qu'on arrivera toujours à un reste trop petit pour être appréciable avec les instruments les plus parfaits. Mais, dans les questions abstraites où les quantités ne sont pas données en nature, mais par les rapports qu'elles doivent avoir avec d'autres, soit numériques, soit géométriques, on ne sera exposé à aucune incertitude tenant à l'imperfection des sens. Il pourra se faire, dans ce cas, que l'opération se termine en employant une seule ou plusieurs subdivisions successives de l'unité. Il sera possible qu'elle se termine en choisissant une certaine loi pour ses subdivisions, tandis qu'elle se continuerait indéfiniment avec une autre. Il sera possible enfin qu'elle ne se termine jamais, quelque loi qu'on choisisse pour les subdivisions successives : c'est le cas où il n'y a aucune mesure commune entre la grandeur à évaluer et celle qui est prise pour unité, comme, par exemple, si l'on veut mesurer la diagonale d'un carré en prenant le côté pour unité.

On voit par là comment, au moyen des nombres et d'une unité choisie arbitrairement, on peut faire connaître toutes les grandeurs de même espèce, soit qu'elles renferment un nombre exact d'unités, soit qu'il y ait en outre une portion, une *fraction* d'unité. Dans le premier cas, un seul nombre suffit, c'est celui des unités entières ; dans l'autre, il en faut en outre plusieurs, exprimant la loi des subdivisions de l'unité et ce que les restes successifs en renferment. Et enfin, dans le cas d'*incommensurabilité,* leur nombre serait indéfini, et, quelque loin qu'on pousse l'opération, on n'obtiendra qu'une approximation, bien suffisante au reste dans la pratique.

### NOMENCLATURE ET REPRÉSENTATION DES NOMBRES.

20. Dès qu'on a senti le besoin d'employer les nombres, on a dû s'occuper des moyens de les distinguer et de les communiquer aux autres. Quelquefois on l'a fait en montrant des objets quelconques en nombre égal à celui qu'on voulait désigner; les doigts de la main ont certainement servi et servent encore souvent à cet usage. Mais nous ne nous livrerons à aucune recherche archéologique à cet égard; nous supposerons une société organisée, ayant un langage et une écriture suffisamment perfectionnés, et nous dirons en quelques mots comment la question a pu être résolue.

La première condition à remplir pour la représentation des nombres par le langage est que chacun d'eux ait un nom différent; la seconde est qu'il n'y ait pas autant de mots particuliers que de nombres, car la meilleure mémoire en pourrait difficilement retenir suffisamment pour les besoins du commerce le plus restreint. Voici comment ce double objet a été rempli.

On a commencé par donner des noms aux dix premiers nombres, dont l'emploi si naturel des doigts avait rendu la communication facile. De cette collection de dix unités on a fait un terme de comparaison dont le langage des signes avait certainement donné l'idée par un procédé que nous voyons journellement employé par les enfants qui, voulant se communiquer des nombres dans des circonstances où la parole leur est interdite, ouvrent et referment les deux mains autant de fois que le nombre contient dix, et, quand le nombre des dizaines est épuisé, lèvent autant de doigts qu'il reste encore d'unités.

Cet artifice si naturel, qui consiste à compter les dizaines au lieu de compter les unités qui sont en nombre beaucoup plus grand, constitue tout le secret du procédé de la numération, qui, au moyen d'une douzaine de mots à peine, permettrait de désigner tous les nombres jusqu'à une limite bien au delà des besoins des sociétés les plus civilisées, et qui dépasse tout ce que l'imagination peut se représenter.

En effet, si le nombre des dizaines dépasse dix, en leur appliquant ce qu'on a fait aux unités et prenant un nouveau terme de comparaison consistant dans la collection de dix dizaines, que l'on a nommée *centaine,* la question sera ramenée à compter les centaines au lieu des dizaines, ce qui est plus simple, puisqu'il y en a beaucoup moins. Après avoir épuisé toutes les centaines renfermées dans les dizaines qu'il fallait compter, il pourra encore rester quelques dizaines en nombre moindre que dix et que l'on pourra par conséquent désigner par un des mots convenus.

Si le nombre des centaines trouvées n'excède pas dix, on pourra le nommer, et le nombre total sera exprimé sans avoir besoin d'employer plus de dix mots plus un.

Mais, si ce nombre dépasse dix, on fera encore un nouveau terme de comparaison de la collection de dix centaines, que l'on nommera un *mille,* et l'on continuera ainsi

jusqu'à ce que le nombre des collections se trouve inférieur à dix et n'oblige pas à former une collection d'un ordre supérieur.

21. Cet ingénieux procédé ne demande, comme on voit, que la conception nette et familière des pluralités depuis un jusqu'à dix; car toutes les collections d'unités qui servent de termes de comparaison successifs se forment les unes des autres par la réunion de dix en une seule; de sorte que, dès qu'on est parvenu à se faire une idée nette d'une d'entre elles, on parvient facilement à se rendre familière la suivante, et il n'est pas nécessaire d'en avoir à son service un bien grand nombre pour suffire aux besoins des nations les plus considérables et les plus civilisées.

Et, en effet, ayant créé les mots qui désignent les neuf premiers nombres et les termes de comparaison ou unités supérieures que l'on nomme *dizaine, centaine, mille, million,* on aurait réellement tout ce qui serait nécessaire aux prodigieuses transactions dont notre temps a donné les premiers exemples. On a évité de créer de nouveaux mots pour la collection de dix mille, qu'on a nommée *dizaine de mille,* et pour celle de dix dizaines de mille, que l'on a nommée *centaine de mille.* Le million est la collection de dix centaines de mille; on a eu ensuite les dizaines et les centaines de millions. Au delà on aurait le billion, puis les dizaines et les centaines de billions, et ainsi de suite.

On voit donc qu'avec quatorze mots on aurait pu suffire à la nomenclature de tous les nombres dont les hommes peuvent avoir à faire usage. Pour satisfaire l'imagination, on a créé des noms pour aller au delà; mais on serait effrayé de l'immensité où l'on se trouverait porté par l'emploi d'une ou deux dénominations de plus.

Il est inutile de dire que l'usage n'est pas complétement conforme à la théorie simple que nous venons d'exposer,

et qu'on emploie quelques dénominations irrégulières pour désigner quelques-uns des nombres au-dessus de dix, et quelques-unes des premières collections de dizaines qu'on nomme *vingt, trente,* au lieu de dire deux dizaines, trois dizaines, etc.

Ce procédé de nomenclature, que l'on nomme la *numération parlée,* consiste donc à décomposer les nombres en unités de différentes espèces nommées *unités simples, dizaines, centaines,* etc., et à exprimer successivement combien le nombre à nommer en contient de chaque espèce; ce qui ne peut jamais aller au delà de neuf pour aucune d'elles, puisque tant qu'il y en avait plus de neuf on en formait de l'ordre suivant.

22. Les nombres étant nommés, on pouvait les communiquer par l'écriture comme tous les autres mots des langues; mais ce moyen se serait difficilement prêté aux combinaisons dans lesquelles les nombres se trouvent engagés, et la loi simple qui a présidé à la numération parlée en donne un bien plus avantageux et qui se présente de lui-même.

En effet, puisque les unités de chaque espèce dont se composent tous les nombres d'après le système qui vient d'être exposé ne peuvent jamais aller au delà de neuf, il suffit de convenir de neuf caractères particuliers pour représenter les neuf premiers nombres, et il ne restera plus qu'à indiquer l'espèce d'unité que chacun désignera dans le nombre particulier qu'on aura à écrire. Cette dernière condition pouvait être remplie de diverses manières. La plus simple, celle à laquelle on s'est arrêté, consiste à écrire à la suite les uns des autres les caractères ou *chiffres* qui expriment les nombres d'unités de chaque espèce que renferme le nombre en question, en indiquant cette espèce par la place occupée par le chiffre qui lui corres-

pond. On est convenu à cet effet de placer toujours à la première place à droite le chiffre des unités simples, à la seconde celui des dizaines, à la troisième celui des centaines, et ainsi de suite indéfiniment. Mais, pour que l'absence possible d'une espèce d'unités n'introduise aucune confusion dans la place que doivent occuper les autres, on est convenu d'un nouveau chiffre qui ne représente aucun nombre et n'a d'autre office que de marquer la place des unités qui manquent et d'éviter ainsi toute erreur sur la signification des autres chiffres.

Ce procédé, qui constitue ce qu'on appelle la *numération écrite,* n'exige, comme on le voit, que dix caractères pour la représentation de tous les nombres, quelque grands qu'on les suppose.

23. Quant aux fractions *ordinaires,* c'est-à-dire celles qui résultent de la subdivision de l'unité en parties égales dont on a pris un certain nombre, elles se déterminent par les deux nombres entiers qui indiquent en combien de parties égales l'unité a été partagée, et combien la fraction en renferme. Le premier se nomme *dénominateur,* le second *numérateur,* et l'on écrit le premier sous le second en les séparant par une barre. Ainsi $\frac{47}{55}$ indique que l'unité a été partagée en 55 parties égales et qu'on en a pris 47.

# CHAPITRE II.

## DES PREMIÈRES OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES, ET DE QUELQUES THÉORÈMES QUI S'Y RAPPORTENT.

24. Dans leurs relations journalières, les hommes sont conduits à chaque instant à ajouter des nombres, à les retrancher, à les répéter un certain nombre de fois ou à les diviser en parties égales. Ces opérations élémentaires s'effectuaient d'abord par des procédés grossiers et irréguliers, même après l'invention de la numération parlée, et il en est encore de même aujourd'hui pour une grande partie de la population chez les nations les plus civilisées. Cependant la décomposition uniforme de tous les nombres en unités décuples les unes des autres et l'écriture simple qui en résulte donnent des moyens commodes de les effectuer, qui sans doute deviendront un jour familiers à tous les hommes. La première condition à remplir est que ces procédés s'appliquent indistinctement à tous les nombres et que la démonstration, faite généralement une fois pour toutes, conduise à une règle qu'on applique aveuglément dans chaque cas particulier, sans avoir besoin de se préoccuper de nouveau de la justifier. Nous n'entrerons pas dans tous les détails que donnerait un Traité élémentaire d'*Arithmétique;* mais cependant nous ne pouvons nous dispenser d'examiner avec quelque attention les questions qui se présentent au début même de la Science, et sur lesquelles doit s'exercer d'abord l'intelligence de l'élève.

25. *Addition.* — On appelle ainsi l'opération qui a

pour but de réunir plusieurs nombres en un seul qui soit égal à leur somme. Si l'on voulait ajouter successivement à l'un d'eux toutes les unités simples qui composent les autres, l'opération serait d'une longueur fastidieuse, et par suite sujette à beaucoup d'erreurs; mais la décomposition uniforme des nombres et l'écriture si simple qui en a été la conséquence conduisent, par une analyse bien naturelle, à une règle de pratique d'une très-grande brièveté.

En effet, le principe précédemment admis, que la somme de plusieurs nombres est indépendante de l'ordre dans lequel on ajoute leurs diverses parties, permet de ramener la question à une plus simple qui consisterait à ajouter entre elles toutes les unités de premier ordre, puis entre elles toutes les unités de second ordre, et ainsi de suite jusqu'aux plus élevées; et les opérations partielles auxquelles on est ainsi conduit, et qui sont en très-petit nombre, s'effectuent immédiatement, puisque tous les nombres à ajouter y sont au-dessous de dix. Mais cependant tout n'est pas fini, parce que la somme trouvée pour les unités d'une même espèce peut dépasser neuf et ne pourrait pas alors être écrite au rang correspondant dans la somme. Ce qui se présente tout naturellement dans ce cas, c'est de les réunir en groupes de dix et d'ajouter aux unités immédiatement supérieures autant d'unités qu'il y a de ces groupes; il restera ainsi dans chaque ordre un nombre d'unités au-dessous de dix, et la somme se trouvera faite et écrite très-promptement. Et la règle qui énonce le procédé que nous venons d'indiquer est applicable à tous les nombres, c'est-à-dire qu'elle est *générale*.

26. *Soustraction.* — Cette opération a pour objet la détermination de ce qui reste d'un nombre quand on en retranche un autre, ou, en d'autres termes, de la différence de deux nombres donnés.

Des remarques analogues à celles que nous avons faites pour l'addition conduisent naturellement à retrancher, si cela se peut, les unités de divers ordres qui composent le plus petit nombre de leurs correspondantes dans le plus grand. Mais, si le nombre des unités d'un certain ordre est plus grand dans le petit nombre que dans l'autre, on emploie un artifice très-simple fondé sur ce principe évident, que la différence de deux nombres n'est pas changée quand on les augmente également tous les deux. D'après cela, si le chiffre d'un certain ordre du grand nombre est moindre que le correspondant du petit, on l'augmente de dix des unités qu'il représente, qui en valent une de l'ordre suivant; alors la soustraction des deux chiffres peut se faire, et le reste sera moindre que neuf. Mais, pour ne pas changer la différence des deux nombres proposés, il faudra ajouter au petit nombre, comme on l'a fait au grand, une unité de l'ordre suivant. De là résulte une règle fort simple pour l'exécution de l'opération. Et cette règle est générale, car les raisonnements que nous venons de faire s'appliquent à tous les nombres.

27. *Multiplication.* — Cette opération a pour objet de trouver le résultat de la répétition d'un même nombre. Cette question se présente à chaque instant dans la vie ordinaire; par exemple, lorsque l'on veut connaître le prix d'un nombre donné d'unités quand on connaît le prix d'une seule : il est évident que pour cela il faut répéter le nombre qui exprime le prix de l'unité autant de fois qu'il y a d'unités.

On pourrait bien exécuter cette opération en ajoutant à lui-même le nombre qui doit être répété; mais, s'il doit l'être un très-grand nombre de fois, ce moyen serait d'une longueur rebutante et, par suite, sujet à beaucoup d'erreurs; l'objet qu'on se propose est d'exécuter cette addition d'une manière abrégée.

La démonstration exacte de ce procédé et les applications de cette opération se fondent sur quelques théorèmes dont nous dirons quelques mots, ne fût-ce que pour faire comprendre comment on peut obtenir, dès les commencements de l'Arithmétique, des propositions générales, aussi bien qu'on le fera plus tard avec des moyens plus puissants.

28. Le premier de ces théorèmes consiste en ce que, dans quelque ordre qu'on multiplie deux nombres, on a toujours le même produit Pour le démontrer, concevons que le nombre qui doit être répété, et qu'on nomme le *multiplicande,* soit réellement répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le *multiplicateur*. Dans chacun de ces multiplicandes répétés, considérons une première unité, nous aurons ainsi un nombre égal au multiplicateur. Considérons-y de même une seconde unité, nous obtiendrons une seconde fois le multiplicateur. Continuons ainsi jusqu'à la dernière unité de tous les multiplicandes, nous obtiendrons une dernière fois le multiplicateur. Ce dernier se trouvera donc répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicande; et, comme toutes les unités qui se trouvaient dans la somme des multiplicandes n'ont été prises chacune qu'une seule fois et qu'aucune n'a été omise, nous concluons de là qu'on obtient le même nombre en répétant le multiplicateur autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicande qu'en répétant le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, ce qui est précisément le théorème énoncé. Et il est démontré généralement, puisque nos raisonnements ont été faits sans particulariser les deux nombres.

29. Dans cette démonstration, nous n'avons désigné les nombres que par le rôle qu'ils jouent dans la question; et c'est à cela qu'est due la généralité de la conclusion, puisqu'elle doit alors s'appliquer à tous les nombres qui

seraient dans les mêmes conditions. Mais cette manière de procéder entraîne des longueurs dans le langage et rend plus difficiles à saisir les déductions dont les termes sont éloignés. Dans la question précédente, qui est fort simple, cet inconvénient n'est pas très-frappant; mais, pour s'en faire une idée exacte, il suffit de lire quelques démonstrations compliquées dans les ouvrages des plus grands géomètres de l'antiquité. Nous croyons donc utile de faire connaître un procédé plus simple, qui rend le langage plus rapide sans nuire à la généralité des résultats. Il consiste à représenter les données par des nombres particuliers, en ayant soin que tous les raisonnements s'appliquent aussi bien à d'autres nombres qu'à ceux que l'on a choisis pour fixer les idées et abréger le discours. Pour le faire comprendre par un exemple simple, nous l'appliquerons à la question même que nous venons de traiter.

En désignant par 79 et 48 les deux nombres à multiplier, nous nous proposons de démontrer que 79 répété 48 fois donne le même résultat que 48 répété 79 fois, ou, en indiquant la multiplication par un point interposé entre les deux facteurs que $79.48$ est égal à $48.79$.

Représentons-nous d'abord le premier produit formé de 48 nombres égaux à 79, et prenons à chacun d'eux une première unité, nous en obtiendrons ainsi 48. Prenons-en une seconde à chacun, nous en aurons encore 48. Une troisième nous donnera une troisième fois 48; et enfin, quand nous arriverons à la dernière, c'est-à-dire à la soixante-dix-neuvième unité, nous aurons une soixante-dix-neuvième fois 48. Donc toutes les unités qui sont dans 79 répété 48 fois équivalent à 48 répété 79 fois.

Or il n'est personne qui ne comprenne que la conclusion serait identique si l'on avait choisi deux autres nombres, et que ceux-ci n'ont été pris que pour la commodité du langage. On a donc ainsi la conviction pleine et entière

de la généralité du théorème. Mais il ne faut pas se dissimuler que dans des questions plus compliquées ce procédé présente des inconvénients que nous signalerons plus tard et qui ont conduit à en adopter un plus parfait.

30. *Autre théorème.* — Si l'on multiplie un nombre par le produit de deux autres, on aura le même résultat que si l'on multipliait ce nombre par le premier facteur de ce produit, et le résultat par le second.

Soit, en effet, un nombre quelconque à multiplier par le produit de 27 par 19, ou par 513. Représentons-nous d'abord ce nombre écrit 27 fois, puis ce tableau répété 19 fois : il est évident que le nombre de fois que le nombre donné sera écrit après cette nouvelle opération sera 19 fois ce qu'il était avant, ou 19 fois 27. Donc, en multipliant le nombre d'abord par 27, puis le produit par 19, on a pour résultat ce même nombre répété un nombre de fois égal au produit de 27 par 19. Et, comme les raisonnements ne dépendent pas des valeurs des nombres 27 et 19, qui ne sont là que pour éviter des circonlocutions, on n'éprouve aucun doute sur la généralité du théorème.

31. *Remarque.* — Ces théorèmes, et d'autres que nous omettons, pourraient facilement être étendus à un nombre quelconque de facteurs ; mais nous nous en dispenserons, parce que notre objet n'est pas de faire un Cours complet, mais d'indiquer dans quel esprit il doit être fait. Nous avons voulu, par ces exemples très-simples, montrer comment on peut, dans l'Arithmétique élémentaire, obtenir la démonstration de propositions générales. Et cela est absolument nécessaire, si l'on ne veut pas que cet enseignement soit borné à la connaissance de procédés mécaniques, sans raisonnements qui les justifient.

La première méthode que nous avons indiquée à cet effet consiste à désigner les nombres uniquement par le rôle

qu'ils jouent dans la question, et raisonner jusqu'à ce que l'on arrive à la conclusion qu'on a en vue, et qui se trouve alors établie généralement.

La seconde consiste à prendre des nombres particuliers arbitraires pour représenter ceux que l'on donne, et à raisonner indépendamment de ces valeurs particulières. La conclusion en sera elle-même indépendante.

32. *Procédé pour effectuer la multiplication.* — Pour obtenir une règle générale il suffirait, d'après ce que nous avons dit, de considérer deux nombres déterminés et de faire les raisonnements indépendamment de leurs valeurs particulières.

Nous n'entrerons pas dans le détail de cette opération. Nous nous contenterons de dire qu'on la décompose en autant d'autres qu'il y a de chiffres au multiplicateur, et que chacune de celles-ci se ramène à la multiplication du multiplicande par un nombre d'un seul chiffre. Car, par exemple, le chiffre des centaines représente un nombre égal à celui que marque le chiffre multiplié par cent. Donc, pour répéter le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans la partie du multiplicateur marquée par le chiffre des centaines, il suffit de le multiplier par le nombre d'unités que marque ce chiffre, puis de multiplier le résultat par cent, ce qui se fait en écrivant deux zéros à sa droite.

La multiplication par un nombre quelconque se ramène donc à celle par un nombre d'un seul chiffre, laquelle se fait immédiatement en multipliant chacune des parties du multiplicande.

Nous n'en dirons pas davantage sur cette opération ; de plus amples détails appartiennent à un Cours spécial d'Arithmétique.

33. *Division.* — Cette opération a pour but de partager un nombre en un nombre désigné de parties égales, et de

faire connaître la valeur de l'une d'elles. La vie ordinaire en offre de fréquentes applications; par exemple lorsque, connaissant la valeur d'un certain nombre d'unités, on veut connaître le prix d'une seule ; ou lorsqu'on veut partager également une somme entre plusieurs personnes; ou, sachant le temps qu'on a mis à parcourir un nombre connu de kilomètres, connaître le nombre qu'on en a parcouru dans l'unité de temps, etc.

Cette opération est l'inverse de la multiplication, puisqu'elle a pour but de trouver une quantité qui, répétée un certain nombre de fois, donne un produit connu. Le nombre à partager s'appelle *dividende,* le nombre des parties *diviseur,* et l'une des parties *quotient.*

Dans l'addition et la multiplication on s'occupait d'abord des unités de la plus faible espèce, parce qu'en s'accumulant elles pouvaient en fournir d'une espèce plus élevée, qu'on pouvait réunir avec les correspondantes et continuer ainsi jusqu'aux plus élevées. Cela était nécessaire aussi dans la soustraction, où l'on peut être obligé d'ajouter aux deux nombres des unités d'ordre supérieur à celles que l'on considère successivement. Mais il en est autrement dans la division : il est utile de commencer le partage par les unités de la plus forte espèce, parce que, s'il ne se fait pas exactement et qu'il reste quelques-unes de ces unités, on peut les réduire avec les suivantes qui sont plus faibles, et continuer semblablement le partage de ces nouvelles unités jusqu'à ce que l'on parvienne aux plus faibles. Et il peut alors arriver deux cas : ou le partage sera possible exactement, ou il y aura un reste d'unités simples moindre que le diviseur. Dans le premier cas, le dividende sera le produit du quotient par le diviseur; dans le second, le dividende sera égal au produit de la partie entière du quotient par le diviseur, plus le reste obtenu.

Ce reste, comme le dividende lui-même, est censé repré-

senter des unités concrètes, c'est-à-dire d'une nature donnée; on peut se proposer de connaître la partie d'unité qu'il faudrait ajouter au nombre déjà obtenu pour avoir opéré le partage exact.

Si, par exemple, on devait diviser le nombre proposé en 57 parties égales et que le reste fût 29, il est évident que, pour prendre le cinquante-septième de ce reste, il suffirait de diviser chacune de ses unités en 57 parties égales, ce qui donnerait à chaque fois un cinquante-septième d'unité. On aurait donc en tout 29 cinquante-septièmes d'unité, qui, formant le cinquante-septième de 29, devront être ajoutés pour compléter le partage.

Nous n'insisterons pas sur les détails de l'opération, et nous renvoyons pour cela aux Traités élémentaires : ce que nous avons dit suffit pour montrer dans quel esprit ils doivent être présentés.

*Remarque.* — Lorsque l'opération ne donne pas de reste, le dividende, qui est toujours égal au produit du quotient par le diviseur, est alors aussi le produit du diviseur par le quotient, et par conséquent ce dernier exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. C'est un second point de vue de la division, et auquel même le résultat doit son nom.

Si l'opération donne un reste, la partie entière du quotient indiquera le plus grand nombre de fois que le diviseur sera contenu dans le dividende.

### DIVISIBILITÉ. — NOMBRES PREMIERS. — COMMUN DIVISEUR.

34. Lorsqu'un nombre est contenu dans un autre un nombre entier de fois sans reste, on dit qu'il est diviseur de cet autre.

Il est des nombres entiers qui n'ont d'autres diviseurs

entiers qu'eux-mêmes et l'unité : on les appelle *nombres premiers*.

Deux nombres qui ont ou n'ont pas de diviseurs entiers, mais qui n'en ont aucun de commun, si ce n'est l'unité, sont dits *premiers* entre eux.

35. *Du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers.* — On appelle ainsi le plus grand nombre contenu exactement dans chacun de ces deux nombres. La règle à laquelle on est conduit pour l'obtenir se trouve dans Euclide; elle se fonde sur cette proposition évidente :

Si l'on considère un tout décomposé en deux parties, toute quantité contenue exactement dans deux de ces trois quantités l'est exactement dans la troisième.

D'après cela, si l'on considère que dans toute division le dividende se compose du produit du diviseur par le quotient et du reste, on obtient les deux propositions suivantes :

Tout nombre contenu exactement dans le dividende et le diviseur l'est aussi dans le reste;

Tout nombre contenu exactement dans le diviseur et le reste l'est dans le dividende.

D'où il suit que tous les diviseurs communs au dividende et au diviseur, et tous ceux qui sont communs au diviseur et au reste, sont identiquement les mêmes; et, par conséquent, le plus grand d'un côté est le même que le plus grand de l'autre.

De là résulte la règle pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

En effet, si le plus petit divise exactement le plus grand, il sera le plus grand commun diviseur. S'il y a un reste, le plus grand commun diviseur de ce reste et du diviseur sera celui des deux proposés; on divisera donc de même le diviseur par le reste, puis ce reste par celui de la nouvelle di-

vision, jusqu'à ce qu'on arrive à un reste nul : le diviseur de la dernière opération est le nombre cherché.

Comme les restes sont entiers et vont toujours en diminuant, on en trouvera toujours un nul; mais, si le diviseur est alors l'unité, les deux nombres sont premiers entre eux.

*Remarque.* — On reconnaît facilement que, si l'on multipliait les deux nombres proposés par un même nombre, tous les restes, et par conséquent aussi le plus grand commun diviseur, le seront eux-mêmes.

36. Les propriétés des nombres premiers absolus ou premiers entre eux sont très-importantes, mais nous nous écarterions de notre objet si nous en faisions l'objet d'une étude spéciale. Nous les admettrons comme connues quand nous aurons besoin d'en faire usage.

## DES FRACTIONS.

37. Lorsque l'unité est partagée en parties égales, et qu'on en prend un certain nombre, on a ce qu'on appelle une *fraction ordinaire;* elle s'exprime par ces deux nombres et, comme nous l'avons déjà dit, peut être considérée comme le quotient de son numérateur par son dénominateur.

Si le numérateur était plus grand que le dénominateur, on aurait plus que l'unité, et le mot *fraction* semble alors peu convenable; on le remplace quelquefois par l'expression de *nombre fractionnaire,* quelquefois aussi on étend le sens du mot *fraction* à la réunion d'un nombre quelconque de subdivisions de l'unité, pouvant former une quantité plus grande que l'unité.

Les fractions pourront s'ajouter entre elles et se retrancher en entendant par là que l'on cherche quelle fraction de l'unité concrète mesure la somme des fractions de

cette unité qui ont été ajoutées ou retranchées. C'est dans le même sens que nous avions déjà défini l'addition et la soustraction des entiers. Nous allons montrer comment ces deux opérations, dont la définition n'offre ni difficulté, ni même aucune idée nouvelle, peuvent s'effectuer au moyen des termes qui expriment ces différentes fractions.

38. *Addition et soustraction des fractions.* — Le but de ces opérations est de trouver sous la forme la plus simple l'expression numérique du résultat qu'elles donneraient si on les effectuait sur les parties mêmes de la quantité donnée prise pour unité.

Pour cela, on remarque d'abord qu'une fraction d'une quantité quelconque exprime toujours la même quantité absolue quand on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre. On déduit de là un moyen de réduire toutes les fractions au même dénominateur sans changer la valeur qu'elles représentent. Cette réduction étant faite, elles expriment toutes des collections d'une même subdivision de la quantité proposée, et l'addition ou la soustraction s'opérera sur les nombres que ces collections respectives en renferment.

39. *Multiplication et division des fractions.* — On peut avoir à répéter une fraction un certain nombre de fois, et cela se fera évidemment en répétant son numérateur ce même nombre de fois, et conservant son dénominateur, qui exprime l'espèce des choses qu'on a à répéter ; mais on ne peut prendre une fraction pour multiplicateur, d'après la définition même de la multiplication qui fait consister cette opération dans la répétition d'une même chose.

De même, la division d'une fraction par un nombre peut être proposée, et on l'effectuera par la division du numérateur en conservant le dénominateur, ou encore par

a multiplication du dénominateur en conservant le numérateur; mais on ne peut se demander de diviser soit un nombre, soit une fraction, par une fraction; cela n'aurait pas de sens d'après la définition de la division. En effet, cette opération, ayant pour objet de partager en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur, exige que ce dernier soit un nombre d'unités, et l'opération n'aurait pas de sens en prenant une fraction pour diviseur.

# CHAPITRE III.

## EXTENSION DE L'IDÉE DE NOMBRE. — RAISONS ET CONSÉQUENCE DE CETTE EXTENSION.

40. Nous avons attaché jusqu'ici au mot *nombre* la simple idée de pluralité, et les théorèmes que nous avons démontrés se rapportent exclusivement à cette notion. L'évaluation des grandeurs donne lieu le plus ordinairement à un nombre et à une fraction. Nous avons démontré quelques théorèmes sur les nombres, quelques autres sur les fractions. Nous avons donné le moyen d'exécuter sur les nombres les opérations les plus simples et de l'usage le plus ordinaire : quelques-unes d'entre elles se sont appliquées aux fractions; quelques autres n'auraient eu dans ce cas aucun sens d'après les définitions qui en avaient été données.

La distinction des nombres et des fractions a des inconvénients plus graves que cette dissymétrie dans les opérations; elle introduit dans les propositions générales une complication qu'il est utile de faire disparaître. Pour en citer un seul exemple, supposons qu'on veuille énoncer une règle pour déterminer la valeur d'une quantité quand on connaît le prix de l'unité; on sera obligé de distinguer deux cas : celui où l'évaluation de la quantité aura donné lieu à un nombre, et celui où elle aura donné lieu en outre à une fraction. Dans le premier cas, on dira qu'il faut multiplier par ce nombre le prix de l'unité; dans le second, on dira qu'il faut d'abord multiplier ce prix par le nombre

des unités s'il y en a, et qu'ensuite il faut prendre une fraction du prix qui soit la même que la fraction d'unité que renferme la quantité proposée.

Ce que nous présente cet exemple se produit dans une multitude d'autres circonstances, où la distinction du nombre et de la fraction a obligé à plusieurs énoncés pour la réponse à des questions où la demande n'en avait cependant qu'un seul.

C'est cet inconvénient qu'on a voulu faire disparaître en donnant de l'extension à l'idée de nombre et en attachant ce nom au résultat de l'évaluation d'une grandeur, c'est-à-dire de la comparaison de cette grandeur avec une autre de même espèce, soit que ce résultat soit ce que nous avions d'abord appelé *nombre,* soit qu'il y ait en outre ou seulement une fraction de l'unité.

C'est là ce que dorénavant nous entendrons par un nombre, que l'usage veut encore qu'on appelle le *rapport* de la grandeur à l'unité, en prenant le mot *rapport* dans un sens restreint, que nous indiquons parce qu'il est usité dans les Mathématiques, quoiqu'on ait cherché à le remplacer par le mot *quotient.*

41. Cette nouvelle définition du nombre permettra de réunir en une seule plusieurs propositions qu'on était obligé d'énoncer séparément; il y aura donc généralisation et par suite simplification dans la science. Mais il y aura cet autre avantage, que cette généralisation a été la conséquence d'analogies reconnues entre des choses qui se présentaient d'abord comme dissemblables; elle les rattache par un lien commun et constate un agrandissement dans les vues de l'esprit.

Mais ces avantages de la généralisation ne peuvent être acquis par la seule extension d'une définition; il est indispensable de reprendre toutes les propositions établies

d'après la première conception et de les étudier d'après la nouvelle. Les unes pourront conserver leur énoncé, les autres demanderont qu'il soit modifié; et, quand elles auront été toutes passées en revue, on continuera le développement de la science, en restant fidèle aux définitions modifiées, jusqu'à ce que peut-être de nouveaux besoins demandent une nouvelle extension, pour laquelle on procédera d'après les mêmes principes.

42. *Addition et soustraction.* — Ces deux opérations considérées sur les nombres *fractionnaires* n'offrent rien de nouveau; elles rentrent dans ce que nous avons dit séparément pour les nombres *entiers* et pour les fractions.

*Multiplication.* — Comme on s'est proposé par l'extension de l'idée de nombre de renfermer plusieurs énoncés en un seul, il faut donner à la multiplication une définition qui permette d'énoncer d'une manière unique les solutions des questions qui conduisaient à une multiplication dans le cas des nombres entiers, et à d'autres opérations dans le cas des fractions. Ainsi, pour reprendre un exemple déjà cité, il faut pouvoir dire que le prix d'un nombre quelconque d'unités est égal au produit du prix de l'unité par le nombre de ces unités.

C'est pour obtenir cette généralisation, dans une multitude de cas différents de celui que nous avons choisi pour exemple, que l'on a étendu de la manière suivante la définition de cette opération :

*La multiplication est une opération qui a pour but de composer un nombre avec le multiplicateur, de la même manière que le multiplicateur l'est avec l'unité.*

43. Appliquons en effet cette définition à la question précédente et supposons qu'on veuille trouver la valeur d'une quantité composée de 15 unités et $\frac{3}{4}$ d'unité, sachant

que l'unité coûte 7 francs et $\frac{2}{3}$ de franc. Comme il est évident que les 15 unités coûtent 15 fois autant qu'une seule, et que les $\frac{3}{4}$ d'une unité valent les $\frac{3}{4}$ du prix de cette unité, on en conclut que, la valeur totale se composant avec le prix de l'unité comme 15 plus $\frac{3}{4}$ se compose avec l'unité, il faut pour l'obtenir multiplier $7\frac{2}{3}$ par $15\frac{3}{4}$, et généralement que le prix d'un nombre quelconque d'unités est égal au produit de la multiplication du nombre qui exprime ce prix par le nombre des unités.

44. On rendrait le langage plus commode en donnant de l'extension à un mot de notre langue qui, d'après son origine, ne semble pouvoir désigner qu'un nombre *entier*, et qu'on emploie cependant dans certaines circonstances pour représenter un nombre fractionnaire. Nous voulons parler du mot *fois*, qui a été créé pour indiquer la répétition d'un même acte. Et cependant il n'est personne qui n'ait employé le mot *fois* dans un sens fractionnaire, quand l'acte avait pour effet de produire une grandeur, et était de nature à pouvoir ne pas s'accomplir totalement, et à produire une fraction de cette grandeur. Si, par exemple, on a à porter une certaine mesure sur une ligne droite, trois fois en entier, plus sa moitié, on dira communément qu'il faut la porter trois fois et demie; on dit, sans craindre de ne pas être compris, qu'on a fait deux fois et demie le tour d'une promenade; nous dirions la même chose pour une fraction moins simple. Cette extension du mot *fois* ne serait donc pas une innovation trop étrange, et l'on en retirerait de nombreux avantages. En l'adoptant, la définition de la multiplication dans le sens le plus général serait la suivante :

*La multiplication est une opération qui a pour but de prendre un nombre autant de fois qu'il est marqué par un autre.*

45. Voyons maintenant à quelle règle on est conduit pour l'exécution de l'opération, et bornons-nous aux cas de deux fractions.

Soit à multiplier $\frac{15}{19}$ par $\frac{8}{11}$, c'est-à-dire, d'après la définition adoptée, soit proposé de prendre les $\frac{8}{11}$ de $\frac{15}{19}$. Cela se fera en en prenant d'abord le onzième, puis le répétant 8 fois. Le onzième s'obtiendra en multipliant le dénominateur par 11, ce qui donnera $\frac{15}{19.11}$, et l'on prendra ce résultat 8 fois en multipliant le numérateur par 8, ce qui donnera $\frac{15.8}{19.11}$. D'où se conclut cette règle, que pour multiplier deux expressions fractionnaires *plus petites ou plus grandes que l'unité, il faut multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.*

*Extension des théorèmes.* — Le produit de deux nombres entiers ne changeant pas quand on intervertit les facteurs, et le produit de deux fractions étant ramené aux produits de leurs termes respectifs, il s'ensuit que le produit de deux fractions ne change pas non plus quand on intervertit l'ordre de la multiplication.

Et il en serait de même pour un nombre quelconque de facteurs fractionnaires ou entiers.

46. Les autres théorèmes que nous avons démontrés sur les produits s'étendront semblablement aux fractions. Ainsi, par exemple, nous avons vu que, si l'on multiplie un nombre entier par le produit effectué de plusieurs autres, on aura le même résultat que si l'on multiplie ce nombre par le

premier facteur du produit, puis le résultat par le second facteur, et ainsi de suite.

Pour étendre ce théorème au cas des fractions, on représentera le multiplicande par une fraction, par exemple $\frac{3}{11}$, et par $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{4}{9}$ celles dont on a à considérer le produit qui sera $\frac{2.6.4}{5.7.9}$. Il s'agira alors de démontrer que $\frac{3}{11}$ multiplié par ce produit est égal à ce que l'on obtiendrait en multipliant $\frac{3}{11}$ par $\frac{2}{5}$, puis le produit par $\frac{6}{7}$ et le résultat par $\frac{4}{9}$.

Or, pour multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2.6.4}{5.7.9}$; il faut multiplier les numérateurs entre eux, ainsi que les dénominateurs, ce qui donne, d'après les n^os 30 et 31,

$$\frac{3.2.6.4}{11.5.7.9};$$

or, c'est précisément cela qu'on trouvera en faisant les multiplications successives de $\frac{3}{11}$ par $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{4}{9}$. Le théorème est donc démontré. L'extension des autres théorèmes se ferait de la même manière.

47. *De la division.* — Cette opération ne pourra plus être considérée comme ayant pour but de partager le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur. Mais l'un des points de vue que nous avions indiqués dans le cas des nombres entiers peut être conservé pour les nombres quelconques, et la définition générale peut être ainsi conçue :

*La division a pour but de trouver un nombre qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende.*

Cette définition est applicable aux nombres fractionnaires comme aux nombres entiers, et servira à généraliser les propositions démontrées pour ces derniers. Il est inutile

de répéter qu'elles auront toujours besoin d'une démonstration nouvelle, pour être étendues aux cas nouveaux déterminés par les définitions nouvelles.

Ainsi, par exemple, si l'on veut connaître le nombre de kilomètres parcourus dans l'unité de temps, sachant combien il en a été parcouru dans un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, d'unités de temps, il suffira de se rappeler qu'en multipliant le nombre quelconque de kilomètres parcourus dans l'unité de temps par le nombre des unités de temps, on a l'espace parcouru dans ce temps. Si donc on connaît le nombre qui exprime cet espace et celui qui exprime le temps, le nombre cherché sera tel, que, multiplié par ce dernier, il reproduira le premier. On peut donc dire qu'en divisant le nombre des kilomètres parcourus par le nombre des unités de temps correspondant, on aura le nombre de kilomètres parcourus dans l'unité de temps.

La règle est donc la même quels que soient les nombres.

De même, si l'on veut connaître le prix d'une unité connaissant le prix d'un nombre quelconque d'unités, on se rappellera que le prix de ce nombre entier ou fractionnaire d'unités est le produit du prix de l'unité par le nombre des unités; donc le prix de l'unité est, comme dans le cas de nombres entiers, le quotient de la division du prix total par le nombre des unités. On raisonnerait de la même manière pour tous les genres de questions qu'on aurait traitées avant l'extension de la définition de la division. Voyons maintenant comment s'effectuera l'opération.

48. Soit à diviser un nombre entier ou fractionnaire par $\frac{6}{11}$; le quotient doit être tel, que, multiplié par $\frac{6}{11}$, il donne le dividende. Ce dernier nombre est donc les $\frac{6}{11}$ du quotient. On aura donc $\frac{1}{11}$ du quotient en prenant le sixième du dividende, et le quotient même en prenant

11 fois ce sixième. Le quotient est donc les $\frac{11}{6}$ du dividende ; ce qui donne cette règle :

*Pour diviser un nombre quelconque entier ou fractionnaire par une fraction, il faut le multiplier par la fraction diviseur renversée.*

49. *Autre point de vue de la division.* — Nous avons regardé d'abord la division comme ayant pour but de partager un nombre en parties égales et de donner la valeur d'une de ses parties. Cette définition a pu être remplacée identiquement par une autre, où l'on prenait pour but de l'opération de trouver une valeur numérique qui, multipliée par le diviseur, reproduisît le dividende. Lorsque cette valeur est un nombre entier, il en est résulté un autre point de vue pour cette même opération, et le quotient a pu être regardé comme indiquant le nombre de fois que le dividende contient le diviseur, ou comme étant tel, que le diviseur multiplié par lui donnât le dividende.

Ce point de vue peut maintenant être généralisé, puisque nous avons démontré que le produit de deux nombres, entiers ou fractionnaires, ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs ; car il suit de là que le quotient entier ou fractionnaire, multiplié par le diviseur, donne le même produit que si l'on multipliait le diviseur par le quotient. On peut donc dire généralement que :

*La division a pour but de trouver un nombre tel, qu'en multipliant le diviseur par ce nombre on obtienne le dividende.*

Et à ce point de vue on pourra dire, par conséquent, dans le sens le plus général, que le quotient indique *le nombre de fois* que le dividende contient le diviseur.

Il est nécessaire de se familiariser avec ces diverses manières d'envisager la même opération.

# CHAPITRE IV.

## EXTENSION DE LA DÉFINITION DES FRACTIONS. — CONSÉQUENCES.

50. Les fractions ont été considérées d'abord comme indiquant en combien de parties égales l'unité a été partagée et combien on prenait de ces parties. Les deux termes étaient donc nécessairement des nombres entiers, et le numérateur pouvait être plus grand ou plus petit que le dénominateur. On a reconnu ensuite qu'elles pouvaient être envisagées comme représentant le quotient de la division du numérateur par le dénominateur. Ce second point de vue permettrait de ne plus supposer les termes entiers, puisqu'on peut diviser des nombres fractionnaires l'un par l'autre; en l'adoptant, l'idée de fraction aurait pris plus d'extension et les propositions qui s'y rapportent plus de généralité. C'est pour cela que nous adopterons cette seconde définition des *fractions,* et nous appellerons ainsi le quotient de la division du numérateur par le dénominateur.

Mais cette extension oblige à revenir sur toutes les règles ou théorèmes établis d'après une définition plus restreinte. Nous ne traiterons pas ce sujet avec tous les détails que demanderait un Cours spécial et complet d'Arithmétique; mais cependant il est si important et si négligé, que nous croyons devoir appeler sur lui l'attention particulière des auteurs et des professeurs, et donner quelques développements sur les questions les plus importantes qu'il renferme.

51. Proposons-nous d'abord de reconnaître généralement si une fraction ne change pas de valeur quand on

multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre, en admettant ce théorème démontré dans le cas des nombres entiers.

Soit, par exemple, la fraction $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{3}{7}}$. En multipliant ses deux termes par une fraction quelconque, par exemple $\frac{5}{11}$, elle devient $\frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{11}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{11}}$, et il s'agit de reconnaître si elle est égale à la première, dont la valeur est $\frac{4\cdot 7}{9\cdot 3}$. Il suffit pour cela d'effectuer la division des fractions qui forment ses deux termes, et qui sont $\frac{4.5}{9\cdot 11}$ et $\frac{3.5}{7\cdot 11}$; on obtient ainsi

$$\frac{4.5.7.11}{9.11.3.5},$$

d'après la règle de la division des fractions à termes entiers et les théorèmes démontrés sur les produits de plusieurs facteurs. En supprimant les facteurs communs, cette fraction se réduit à $\frac{4\cdot 7}{9\cdot 3}$ qui est précisément la valeur de la première. Celle-ci n'a donc pas changé de valeur par la multiplication de ses deux termes par $\frac{5}{11}$. Or les raisonnements que nous avons faits sont indépendants des valeurs particulières des nombres particuliers que nous avons choisis seulement pour fixer les idées. Nous avons eu soin de les conserver tous jusqu'à la fin sans altération, afin qu'il fût bien évident que la manière dont ils entrent dans les résultats eût été la même pour d'autres nombres choisis à leur place, et que la conclusion eût été la même.

Il est encore évident que cette conclusion s'applique à la division des deux termes par un même nombre quelconque, puisque la division par une fraction est la multiplication par la fraction renversée.

Nous pouvons donc maintenant énoncer cette proposition générale :

*La valeur d'une fraction à termes quelconques ne change pas quand on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre quelconque.*

On voit que cette proposition donne le moyen de réduire au même dénominateur un nombre quelconque de fractions à termes quelconques, entiers ou fractionnaires.

52. Avant de nous occuper des différentes opérations sur ces nouvelles fractions, nous ferons quelques remarques très-simples, mais très-générales et très-utiles.

53. *Remarques.* — Nous avons déjà eu l'occasion de faire remarquer que, si une quantité était décomposée en plusieurs parties et qu'on répétât un même nombre de fois chacune d'elles, la quantité elle-même était répétée ce même nombre de fois. Il résulte immédiatement de là que, si l'on divise par un même nombre entier les différentes parties d'un tout, on a divisé ce tout par ce même nombre. Si, par exemple, on prend le septième de chaque partie, on aura, en les ajoutant, une quantité qui, répétée sept fois, reproduira la première somme ou la quantité proposée; elle en était donc le septième.

Enfin, il est évident que, si l'on prend une même fraction de chacune des parties d'une quantité, on a pris cette même fraction de la quantité.

Si, par exemple, on a pris les $\frac{5}{7}$ de chaque partie, c'est-à-dire le septième répété 5 fois, il suit de ce qui précède qu'en prenant d'abord le septième de toutes les parties

on a le septième de la quantité proposée ; répétant ensuite 5 fois les nouvelles parties, on aura répété 5 fois leur somme, qui est le septième de la quantité proposée ; on aura donc les $\frac{5}{7}$ de cette quantité en prenant les $\frac{5}{7}$ de chacune de ses parties.

Il est facile de reconnaître que ce que nous venons de démontrer pour la somme est vrai pour la différence de deux quantités ; car, la plus grande étant égale à la plus petite ajoutée à cette différence, les $\frac{5}{7}$ de la grande sont égaux aux $\frac{5}{7}$ de la petite, plus les $\frac{5}{7}$ de la différence : donc les $\frac{5}{7}$ de la grande, moins les $\frac{5}{7}$ de la petite, sont les $\frac{5}{7}$ de la différence, ce qu'il fallait démontrer.

On peut donc énoncer cette proposition générale :

*Si l'on prend une même fraction quelconque de plusieurs quantités ajoutées ou retranchées les unes des autres, on a pris la même fraction de la quantité qui serait le résultat de ces additions et soustractions.*

54. *Addition.* — Si l'on a à ajouter des fractions à termes quelconques qui n'aient pas le même dénominateur, on les y réduira, comme nous l'avons démontré, par le même procédé que si les termes étaient entiers, et par conséquent nous pouvons supposer que les fractions à ajouter aient le même dénominateur fractionnaire. Or nous allons démontrer qu'il faut suivre la même règle que pour les fractions à termes entiers, c'est-à-dire ajouter les numérateurs et donner à leur somme le dénominateur commun.

Supposons, en effet, pour la commodité du langage, que le dénominateur soit, par exemple, $\frac{5}{11}$ ; chaque fraction étant le quotient de la division de son numérateur par $\frac{5}{11}$

sera donc telle que, multipliée par $\frac{5}{11}$, elle produira son numérateur; mais, chaque numérateur étant les $\frac{5}{11}$ de la fraction correspondante, leur somme sera les $\frac{5}{11}$ de la somme des fractions; cette somme sera donc le quotient de la division de la somme des numérateurs par $\frac{5}{11}$.

*Donc, pour avoir la somme de fractions ayant un même dénominateur fractionnaire, il faut faire la somme des numérateurs et lui donner le dénominateur commun.*

55. *Soustraction.* — Les deux fractions étant réduites au même dénominateur fractionnaire, il faudra encore retrancher les numérateurs et donner au reste le dénominateur commun.

La démonstration se fera comme pour l'addition, parce que le théorème sur lequel nous nous sommes appuyé a lieu, comme nous l'avons fait voir, pour des quantités ajoutées ou retranchées les unes des autres. Nous nous dispenserons de la reproduire.

56. *Multiplication.* — Considérons de suite le cas le plus compliqué, qui renferme tous les autres comme cas particuliers.

Soient, par exemple, les deux fractions $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{7}}$ et $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{11}}$.

Nous ne prenons des nombres particuliers que pour abréger le langage, qu'il serait presque impossible de suivre si, comme les anciens, nous désignions les nombres par la manière dont ils entrent dans les données. Mais il n'y aura aucun inconvénient à cela, parce que tous les nom-

bres que nous avons choisis, étant différents les uns des autres, ne pourront être confondus si nous ne faisons qu'indiquer les opérations à effectuer sur eux; et la manière dont ils entreront dans les résultats serait la même que pour d'autres nombres quelconques sur lesquels on ferait les mêmes raisonnements. Les conclusions qu'on en tirera seront donc générales.

Cette observation, que nous avons déjà faite à l'occasion de questions précédemment traitées, s'appliquera à toutes celles dont nous allons nous occuper, et nous nous dispenserons de la reproduire à chaque fois.

Pour ramener la question proposée à une question connue, réduisons les fractions données à la forme de fractions simples; elles deviendront $\frac{4.7}{5.3}$ et $\frac{2.11}{9.6}$, et le produit demandé sera

$$\frac{4.7.2.11}{5.3.9.6}.$$

Or c'est précisément là ce que l'on trouverait en multipliant entre eux les numérateurs des deux premières, ainsi que leurs dénominateurs; car on trouverait ainsi

$$\frac{\frac{4.2}{5.9}}{\frac{3.6}{7.11}} \quad \text{ou} \quad \frac{4.2.7.11}{5.9.3.6}.$$

La règle pour la multiplication des fractions simples s'applique donc aux fractions quelconques.

57. *Division.* — Supposons maintenant qu'il s'agisse de diviser les fractions $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{7}}$ par $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{11}}$; on commencera par les ré-

duire à des termes entiers; elles deviennent alors

$$\frac{4.7}{5.3} \text{ à diviser par } \frac{2.11}{9.6},$$

ce qui donnera $\frac{4.7.9.6}{5.3.2.11}$ pour le quotient cherché.

Or, si l'on multipliait la fraction dividende par la fraction diviseur renversée $\frac{\frac{6}{11}}{\frac{2}{9}}$, on trouverait

$$\frac{\frac{4.6}{5.11}}{\frac{3.2}{7.9}} \text{ ou } \frac{4.6.7.9}{5.11.3.2},$$

ce qui est précisément le quotient cherché.

La règle démontrée pour les fractions simples, c'est-à-dire à termes entiers, s'applique donc en général à toutes les fractions.

Ce qui précède suffit pour montrer comment toutes les propositions établies d'après le premier point de vue sous lequel les fractions avaient été envisagées se trouvent étendues au nouveau qui est beaucoup plus général, et les théorèmes qui ramenaient la solution de certaines questions à des opérations sur des fractions à termes entiers seront applicables aux fractions quelconques, puisqu'elles sont réductibles à cette forme; quant à l'exécution de ces opérations, elle s'effectuera par les règles que nous venons de démontrer.

### REMARQUES SUR CE QUI PRÉCÈDE.

58. Les questions traitées jusqu'ici sont tellement simples, qu'à peine on y reconnaît quelques traces de la mé-

thode analytique. Elle y est cependant presque toujours employée, mais bornée le plus souvent à la première réduction que nous avons recommandée, celle de la décomposition.

Dans le cas de la division, cependant, la décomposition du dividende se fait d'une manière spéciale et ne consiste pas seulement dans la considération des unités de différents ordres. Les parties que l'on prend successivement dans le dividende sont choisies de manière à pouvoir être exactement divisées et à donner ainsi les unités de divers ordres du quotient, et, pour que toutes les parties ainsi employées constituent le dividende complet, il faut commencer l'opération par les plus fortes unités, afin que ce qui en restera après qu'on y aura pris la partie divisible puisse se réduire avec les suivantes pour composer une nouvelle partie divisible exactement : ce qui ne serait pas possible si l'on commençait par les plus faibles unités.

Dans ce cas donc, le mode de décomposition ne se présente que comme moyen de satisfaire aux conditions que nous venons d'indiquer, c'est-à-dire qu'il résulte d'une analyse bien réelle, mais extrêmement simple.

Les opérations sur les fractions en offrent des exemples plus sensibles. Pour l'addition et la soustraction, on ramène au cas simple d'un dénominateur commun ; pour la multiplication et la division des fractions à termes entiers, la question se ramène à deux autres plus simples. Les opérations sur les fractions à termes non entiers se ramènent au cas plus simple des termes entiers. Nous ne pouvons signaler toutes les circonstances où cette marche, qui est *analytique,* a été suivie ; nous nous en rapportons à l'intelligence des professeurs pour la faire ressortir dans tous les cas qui présenteront quelque intérêt.

# CHAPITRE V.

## PROPRIÉTÉS DES FRACTIONS ÉGALES. — RÈGLES DE TROIS.

59. Lorsque deux fractions à termes quelconques sont égales, c'est-à-dire lorsque le quotient du numérateur par le dénominateur, ou le *rapport* de ces deux nombres, est le même, on dit que les quatre termes sont en proportion : et il ne faut pas oublier que le quotient est le nombre qui, multipliant le diviseur ou multiplié par le diviseur, donne pour produit le dividende.

Les anciens géomètres faisaient un plus grand usage des proportions que ne le font les modernes, qui les remplacent souvent par des équations. Les diverses propriétés dont elles jouissent se déduisent très-simplement des propositions que nous avons démontrées sur les fractions considérées de la manière la plus générale.

60. Ainsi, par exemple, si l'on réduit les deux fractions égales au même dénominateur, les numérateurs seront nécessairement égaux ; et réciproquement, si deux fractions réduites au même dénominateur ont le même numérateur, elles sont égales. C'est ce qu'on exprime dans le langage des proportions en disant :

*Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.*

*Et réciproquement, si quatre nombres sont tels, que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyens, ils sont en proportion.*

61. Rien n'est plus facile encore que de démontrer que, si l'on a deux proportions et que l'on multiplie ou divise

l'un par l'autre les termes correspondants, ces quatre nombres formeront proportion ; car il suffit pour cela de multiplier ou de diviser d'abord les premières fractions, puis de faire la même opération sur les secondes qui leur sont respectivement égales.

Une autre propriété importante des fractions égales en nombre quelconque consiste en ce que la somme des numérateurs, divisée par la somme des dénominateurs, donne encore une fraction égale. Et il en serait de même si l'on retranchait quelques-uns des numérateurs au lieu de les ajouter, pourvu qu'on retranchât aussi les dénominateurs correspondants.

Pour la démontrer généralement, désignons la valeur de ces fractions par une fraction arbitraire réduite à avoir ses termes entiers, ce qui est toujours possible ; soit, par exemple, $\frac{5}{13}$ cette valeur. D'après ce qui a été établi précédemment, chacun des numérateurs est égal aux $\frac{5}{13}$ du dénominateur correspondant : la somme des numérateurs est donc aussi les $\frac{5}{13}$ de la somme des dénominateurs, ce qu'il fallait démontrer ; et il en serait de même si l'on retranchait les termes de quelques-unes de ces fractions. Nous ne faisons que répéter ici ce que nous avons démontré précédemment, savoir : que si l'on prenait une même fraction de plusieurs quantités ajoutées ou retranchées les unes des autres, on obtenait la même fraction de la somme ou de la différence de ces quantités.

Ce théorème, dont les applications sont très-fréquentes, s'énonce comme il suit dans le langage des proportions :

*Si l'on a une suite de rapports égaux, la somme ou la différence d'un nombre quelconque des antécédents est à la somme ou à la différence de leurs conséquents comme un antécédent est à son conséquent.*

62. Les proportions s'appliquent à la résolution des problèmes auxquels on est convenu de donner le nom de *règles de trois*, quoiqu'une règle ne doive être entendue que comme l'indication du procédé de solution et non comme l'énoncé de la question.

Ces sortes de problèmes ont pour objet la détermination d'un des quatre termes d'une proportion quand on connaît les trois autres ; et c'est à quoi l'on parvient facilement d'après l'égalité du produit des extrêmes à celui des moyens. Tout consiste donc à bien établir la proportionnalité des quatre termes ; mais c'est ce qu'on néglige beaucoup trop. On se contente souvent de reconnaître qu'elle a lieu quand les rapports sont entiers, et la règle générale qu'on en tire ne se trouve nullement démontrée. On induit donc les élèves en erreur en la donnant comme bien établie, et il vaut mieux leur donner un peu plus de travail que de leur fausser le jugement.

Un seul exemple suffira pour montrer comment on doit raisonner dans toutes les questions de ce genre.

Supposons qu'on veuille démontrer qu'il y a proportion entre deux nombres quelconques d'unités d'une même marchandise et leurs prix respectifs. Les deux nombres d'unités peuvent être des fractions quelconques, comme $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$ et $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{11}}$, ou plus compliquées encore. Mais, quelles qu'elles soient, leur quotient ou *rapport* pourrait être réduit, comme nous savons, à une fraction à termes entiers ; et cette possibilité suffit pour conduire à la démonstration très-simplement.

Représentons, en effet, le rapport des deux quantités en question par une fraction quelconque à termes entiers, par exemple $\frac{15}{29}$; la première des quantités sera donc les $\frac{15}{29}$ de

la seconde. Mais le prix de $\frac{1}{29}$ de la seconde serait évidemment $\frac{1}{29}$ du prix de cette quantité même; et 15 fois $\frac{1}{29}$ coûteront 15 fois autant qu'un seul, ou les $\frac{15}{29}$ du prix de cette quantité. Il y a donc même rapport ou proportion entre les prix et les quantités de marchandise, quels que soient les nombres qui les expriment.

63. Cette proposition étant ainsi établie pour toute espèce de marchandise homogène, on l'appliquera sans avoir besoin de faire aucun raisonnement nouveau; et, si l'un des quatre termes était inconnu, on l'obtiendrait toujours par la propriété que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. On aura alors à trouver un nombre qui, multiplié par un nombre connu, donne un produit connu: ce qui ramènera à la multiplication et à la division.

64. On peut déterminer d'une manière différente le terme inconnu de cette proportion, d'après les trois autres.

Soit proposée, par exemple, la question suivante:

$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$ d'unités ont coûté $\frac{8}{13}$ de francs, combien $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{11}}$ d'unités coûteront-elles?

On cherchera d'abord combien une unité coûterait. Or, d'après ce que nous avons démontré généralement dans le Chapitre III, il faudra pour cela diviser le prix $\frac{8}{13}$ par le nombre correspondant des unités, qui est $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$. Connaissant le prix de l'unité, il faudra, comme nous l'avons montré dans

ce même Chapitre, le multiplier par le second nombre d'unités $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{11}}$ pour en obtenir le prix.

Le nombre cherché s'obtiendra donc en multipliant $\frac{8}{13}$ par $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{11}}$ et divisant le produit par $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$.

C'est à quoi l'on eût été conduit aussi en posant la proportion

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} : \frac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{11}} :: \frac{8}{13} : \text{au prix cherché.}$$

65. Le second procédé est plus simple quand il s'agit de nombres entiers ; mais, dans le cas général, on voit qu'il n'offre aucun avantage réel sur l'autre. Et ce dernier est fondé sur cette considération importante, qu'il n'est pas permis d'ignorer, que les prix ont entre eux le même rapport que les quantités mêmes. Si donc il fallait sacrifier l'une des méthodes, ce ne devrait pas être celle des proportions.

66. *Remarque.* — Les proportions sont d'un grand usage dans la Géométrie, mais il ne faut pas oublier que l'on ne peut comparer que des quantités de même espèce ; on peut néanmoins avoir une proportion dont les quatre termes ne soient pas homogènes, parce que le rapport de deux quantités d'une même espèce peut être égal au rapport de deux autres d'une même espèce, différente de la première ; en entendant toujours par rapport le nombre qui, multipliant

la seconde quantité, reproduit la première. Ainsi, par exemple, le rapport de deux surfaces est $\frac{7}{9}$ quand la seconde, multipliée par $\frac{7}{9}$, donne la première, ou, en d'autres termes, quand la première est les $\frac{7}{9}$ de la seconde.

Parmi les propositions démontrées ci-dessus, il y en a qui subsisteraient encore dans le cas où les termes seraient des grandeurs concrètes, d'une seule ou de deux espèces différentes ; mais la plupart de celles dont on fait usage supposent que les quatre termes sont des nombres. Par exemple, il n'y aurait aucun sens à attacher aux produits des extrêmes et des moyens si ces termes n'étaient pas des nombres. On ne pourrait changer d'ordre les moyens, s'ils étaient d'espèces différentes, etc.

On voit donc que, pour faire l'application des théorèmes démontrés sur les proportions entre des nombres, aux proportions entre des quantités concrètes, géométriques ou autres, il faut commencer par réduire ces dernières à des proportions entre des nombres, et pour cela remplacer le rapport de deux grandeurs d'une même espèce quelconque par le rapport de deux nombres, ce qui exige que ces deux grandeurs aient une mesure commune. Et réciproquement, si elles en ont une, leur rapport sera le même que celui des deux nombres entiers qui expriment combien de fois elle est contenue dans chacune de ces deux grandeurs.

On peut donc passer ainsi de proportions entre des quantités concrètes à des proportions entre des nombres, et y appliquer tous les moyens de calcul démontrés pour ces derniers; et, lorsque l'on sera parvenu à des proportions entre des nombres représentant des quantités concrètes, on pourra les remplacer par ces dernières, puisque les rapports n'en seront pas altérés.

# CHAPITRE VI.

## FRACTIONS DÉCIMALES. — PREMIER EXEMPLE DE LIMITES DE QUANTITÉS VARIABLES.

67. L'évaluation des quantités en subdivisions décimales de l'unité offre l'avantage d'une représentation semblable à celle des nombres entiers, d'où résulte une plus grande facilité pour les opérations. La réduction au même dénominateur n'est plus nécessaire pour les additions et soustractions ; et les subdivisions de l'unité étant toujours les mêmes, on est bientôt familiarisé avec elles, et l'on se fait facilement une idée approchée de la valeur d'une fraction décimale, à la seule inspection de ses premiers chiffres.

Mais l'avantage de cette uniformité est quelquefois contre-balancé par le grand nombre des chiffres que l'on doit prendre pour avoir avec une grande approximation la valeur qu'on renonce à prendre exactement.

Lorsqu'une fraction est donnée par un numérateur et un dénominateur, et qu'on veut la réduire à la forme décimale, il suffit d'effectuer la division qu'elle indique, en réduisant le numérateur entier et les restes successifs en dixièmes, centièmes, etc., comme on réduisait les divers ordres d'unités du dividende et des restes successifs en unités d'ordres inférieurs, pour trouver les différents chiffres du quotient entier.

Cette opération peut se terminer, comme aussi elle peut se prolonger indéfiniment. On peut reconnaître lequel de ces cas aura lieu, d'après la décomposition du dénominateur en facteurs premiers. Nous ne nous occuperons

pas de ces détails ; nous nous bornerons à dire que, quand l'opération ne se termine pas, il y a un certain nombre de chiffres consécutifs qui se reproduisent dans le même ordre indéfiniment; et l'on reconnaît que la périodicité commence, quand on retombe sur un reste déjà obtenu, qui ramène les suivants dans le même ordre et par suite les chiffres du quotient. Or on ne peut avoir plus de restes différents qu'il n'y a d'unités dans le diviseur diminué d'une unité. Si donc, après en avoir obtenu ce nombre, l'opération n'est pas exactement terminée, le quotient sera périodique, et la période commencera au chiffre d'ordre quelconque fourni par le premier reste qui doit se reproduire. Il existe donc des quantités susceptibles d'être exprimées exactement au moyen de certaines subdivisions de l'unité, et qui ne peuvent l'être par d'autres assujetties à certaines conditions, qui leur permettent cependant d'atteindre un degré quelconque de petitesse. Ainsi, par exemple, une quantité qui serait exactement les $\frac{9}{11}$ de l'unité ne peut jamais être complétement épuisée au moyen des dixièmes, centièmes, millièmes, etc., d'unité, quelque loin qu'on prolonge l'opération : la division donnera 0,81 81 81..., la période 81 se reproduisant sans fin.

68. *Limites de variables.* — Lorsque l'on fait une division qui doit, ou non, conduire à un reste nul, l'erreur que l'on commettrait en s'arrêtant à un certain chiffre du quotient serait moindre qu'une unité de l'ordre de ce chiffre ; car, puisqu'on met toujours au quotient les plus forts chiffres possibles, si l'on ajoutait à l'un quelconque d'entre eux une seule unité de son espèce, on aurait un nombre plus fort que le quotient complet ; seulement il le dépasserait de moins d'une unité de cette espèce, puisqu'il manquait quelque chose et qu'on n'a ajouté qu'une unité.

Lors donc qu'une division conduit à un quotient périodique, on peut y prendre un assez grand nombre de chiffres pour que la différence avec le quotient exact soit moindre qu'une unité d'un ordre décimal aussi avancé qu'on voudra, et par conséquent moindre que toute fraction que l'on aurait assignée.

Une fraction décimale périodique nous offre donc le premier exemple d'une quantité variable qui augmente continuellement, et qui cependant n'atteint jamais une certaine valeur fixe bien déterminée, quelque grand que devienne le nombre des chiffres qui en expriment les parties qui s'ajoutent successivement les unes aux autres. Mais, si elle n'atteint jamais cette valeur fixe, sa différence avec elle diminue de manière à pouvoir devenir et rester ensuite au-dessous de toute grandeur désignée, quelque petite qu'elle soit.

Dans ces circonstances, on dit en général que la quantité fixe est la *limite* de la quantité variable, quelle que soit l'espèce de ces quantités.

Dans le cas actuel, on dira que la fraction périodique a pour limite la valeur de la fraction qu'on essayait de réduire en décimales.

La considération des limites est une des plus importantes et des plus fécondes des sciences mathématiques. Nous la développerons plus tard avec tout le soin qu'elle mérite ; pour le moment, nous nous bornerons à ce qui est strictement nécessaire pour ne pas laisser une lacune fâcheuse dans la partie de l'Arithmétique dont nous nous occupons.

69. Si l'on a une expression décimale indéfinie, périodique ou non, provenant d'une opération quelconque, dont on sait seulement que, quand on a posé un chiffre d'un ordre quelconque, on a un résultat trop faible, mais qu'on en aurait un trop fort en augmentant ce chiffre d'une

unité, il est évident qu'une pareille expression a une limite, puisque l'erreur commise en s'arrêtant à un chiffre est moindre qu'une unité du même ordre, et peut par conséquent devenir plus petite que toute quantité donnée.

70. Maintenant il est facile de reconnaître que dans une pareille expression le déplacement de la virgule produit sur la limite le même effet que lorsque le nombre des chiffres est fini.

En effet, arrêtons la fraction décimale à un chiffre quelconque, le reste qui compléterait la limite sera moindre qu'une unité du dernier ordre. Dans l'expression ainsi obtenue, déplaçons la virgule, par exemple, en l'avançant d'un rang vers la droite ; le nouveau nombre sera dix fois plus grand, et, par conséquent, si on lui ajoutait dix fois le premier reste, on aurait dix fois la limite de l'expression proposée. Mais, en prenant un nombre de chiffres de plus en plus grand, le reste peut devenir moindre que toute quantité donnée, ainsi que son décuple. Donc la limite de l'expression obtenue par le déplacement de la virgule est égale à dix fois celle de la proposée.

Le même raisonnement s'appliquerait à un déplacement quelconque de la virgule vers la droite ou vers la gauche, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

« Si dans une expression décimale indéfinie on déplace d'une manière quelconque la virgule, la limite se trouve multipliée ou divisée par le même nombre que le serait, par le même déplacement, la valeur d'une expression décimale dont le nombre des chiffres serait limité. »

71. Nous avons vu qu'une fraction ordinaire, qui n'est pas exactement réductible en décimales, donne une expression périodique.

Rien n'est plus facile que de résoudre la question inverse et de déterminer la limite d'une fraction décimale

périodique quelconque dont on ne connaît pas l'origine. Si la périodicité ne commence pas au premier chiffre décimal, on ramènera la question à ce cas plus simple en avançant la virgule jusqu'au commencement de la première période ; on multiplierait ainsi la limite par le produit de plusieurs facteurs dix, et il suffirait par conséquent de déterminer la valeur de la nouvelle fraction, puis de la diviser par cette puissance de dix. La partie à droite de la virgule étant seule inconnue, nous ne nous occuperons que de cette recherche.

Pour résoudre cette dernière question d'une manière générale, considérons par exemple la fraction périodique

$$(1) \qquad 0,357\,357\,357\ldots,$$

dont la période commence au premier chiffre.

Nous savons qu'en avançant la virgule jusqu'au commencement de la seconde période nous aurons rendu la limite cherchée mille fois plus grande. Nous aurons ainsi

$$(2) \qquad 357,357\,357\ldots,$$

expression dont la partie périodique indéfinie qui suit la virgule a évidemment la même limite que (1). La différence de (1) et (2) a donc pour limite 357 ; la différence des limites de (1) et (2) est donc la valeur de la limite de (1) répétée mille fois moins une fois, ou 999 fois. Donc 999 fois la limite de (1) est 357 ; donc (1) a une limite qui est $\frac{357}{999}$.

Et comme les mêmes raisonnements se feraient pour toute autre période composée d'un nombre quelconque de chiffres, on peut énoncer cette règle que :

« Toute fraction périodique, dont la période commence au premier chiffre décimal, a une limite représentée par une fraction ayant pour numérateur une de ses tranches et

pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans une tranche. »

Le cas où il y a une partie non périodique après la virgule résulte de ce qui précède ; et l'on voit que toute fraction décimale, qui est périodique à partir d'un chiffre quelconque, a pour limite une fraction ordinaire.

# CHAPITRE VII.

## EXTRACTION DES RACINES. — NOUVELLE EXTENSION DONNÉE A L'IDÉE DE NOMBRE.

72. Les produits d'un nombre par lui-même se nomment les *puissances* de ce nombre ; leur degré est le nombre de fois qu'il est facteur. Relativement à ses puissances, le nombre s'appelle *racine*.

Nous ne parlerons pas des procédés à suivre pour trouver la racine d'un degré quelconque d'un nombre donné ; nous renvoyons pour cela aux Traités d'Arithmétique.

Si l'on formait les puissances d'un même degré des nombres entiers consécutifs, on obtiendrait des nombres entiers qui différeraient de plus d'une unité : les nombres entiers compris entre deux puissances consécutives auraient donc leurs racines comprises entre deux nombres entiers consécutifs, et par conséquent non entières.

Or les théorèmes sur les facteurs premiers démontrent qu'un nombre fractionnaire élevé à une puissance quelconque ne peut produire un nombre entier. Donc les nombres entiers compris entre deux puissances consécutives ne peuvent avoir ni racine entière ni racine fractionnaire ; ils n'auraient donc aucun nombre pour racine, puisque nous ne reconnaissons encore que des nombres entiers ou fractionnaires.

On pourra bien trouver des nombres fractionnaires dont la puissance sera aussi voisine qu'on voudra du nombre proposé ; mais aucun ne pourra le produire aussi exactement.

Le même inconvénient se rencontre dans l'évaluation des grandeurs concrètes en nombres. Celles qui ont une commune mesure avec l'unité choisie peuvent être exprimées par un nombre entier ou fractionnaire; celles qui n'en ont pas ne peuvent pas l'être. Dans la pratique, il est vrai, les choses se passeront toujours comme s'il y avait une commune mesure, parce que les subdivisions de l'unité deviendront assez petites pour que le reste de la grandeur à évaluer soit imperceptible. Mais, quand il s'agit de grandeurs liées par des relations purement théoriques, on peut démontrer qu'il n'existe pas de mesure commune entre elles, et alors l'évaluation exacte de l'une d'elles est reconnue impossible au moyen des subdivisions de l'autre en parties égales. Si, par exemple, on voulait évaluer la diagonale du carré dont le côté est pris pour unité, on ne pourrait le faire au moyen d'aucun nombre entier ou fractionnaire, parce qu'on démontre qu'il n'y a pas de commune mesure entre la diagonale et le côté d'un carré. Et si, pour échapper à cette difficulté, on changeait l'unité, il serait toujours impossible d'évaluer avec une même unité quelconque la diagonale et le côté. Il faut donc ou donner de l'extension à l'idée de nombre, ou dire qu'il y a des grandeurs qui peuvent être exprimées en nombres avec une certaine unité, et ne le pourraient avec une autre ; et que dans une même question on peut avoir à considérer des grandeurs qui ne sont pas susceptibles toutes d'être exactement exprimées en nombre, quelque unité qu'on choisisse.

73. Et nous ferons ici une remarque applicable à toutes les questions sur les nombres. Elle consiste en ce que, quelle que soit la nature des opérations effectuées en vue de déterminer la valeur d'un nombre, si ces opérations ne s'arrêtent jamais, et que les restes à évaluer après chacune

d'elles soient mesurés avec des subdivisions de l'unité qui décroissent continuellement et puissent devenir moindres que toute valeur désignée, la recherche de ce nombre peut toujours être considérée comme identique avec celle qui aurait pour but la mesure d'une quantité concrète déterminée.

En effet, si sur une ligne droite indéfinie nous portons à partir d'un de ses points un nombre entier ou fractionnaire d'unités de longueur égal au résultat de la première opération numérique ; qu'à la suite de cette longueur on en porte une autre, mesurée par le résultat numérique de la seconde opération, et ainsi de suite indéfiniment, la longueur totale à partir de l'origine fixe ira constamment en augmentant; mais on peut à chaque opération assigner un point qu'elle ne pourra atteindre, et il suffira pour cela de lui ajouter une des subdivisions de l'unité qui se rapportent à cette opération. Or l'extrémité de la longueur variable s'avançant toujours dans le même sens, et ne pouvant cependant jamais atteindre des points fixes assignables, tend nécessairement vers une position déterminée qu'elle n'atteindra jamais, puisqu'elle doit toujours être en mouvement, mais dont elle sera éloignée d'une quantité qui deviendra au-dessous de toute quantité donnée. La distance de l'origine à ce point limite est donc une quantité déterminée, dont l'évaluation au moyen de l'unité choisie conduirait identiquement aux mêmes résultats numériques successifs, que les opérations purement abstraites auxquelles conduisait la question proposée.

Toutes les exceptions et anomalies résultant du point de vue sous lequel nous avons jusqu'ici envisagé les nombres se résument donc dans ce simple énoncé :

« Lorsqu'une quantité concrète d'espèce quelconque varie d'une manière continue, elle passe par une infinité de valeurs qui sont exprimables en nombres, et par une

infinité d'autres qui ne le sont pas; car, dès qu'il y en a une non exprimable, toutes ses subdivisions en parties égales, ainsi que leurs multiples, seront dans le même cas. »

Il est évident qu'on ne pouvait laisser subsister une pareille anomalie dans la science.

74. C'est pour faire disparaître ces exceptions qu'on a donné une nouvelle extension à l'idée de nombre; on n'a pas voulu que les seules grandeurs ayant une mesure commune avec l'unité fussent regardées comme exprimables en nombres; et l'on a étendu cette dénomination à la *manière d'être relative,* au *rapport* de deux grandeurs quelconques, ayant ou n'ayant pas de mesure commune.

Mais il ne suffira pas que l'on convienne de dire que deux grandeurs incommensurables ont entre elles un rapport que l'on désignera sous le nom de *nombre incommensurable;* il faudra définir rigoureusement l'*égalité* des rapports incommensurables.

Observons d'abord qu'en partageant l'une des grandeurs en parties égales suffisamment petites, et les portant dans l'autre autant de fois que possible, le reste qui sera moindre que l'une des parties pourra être rendu moindre que toute grandeur donnée; de sorte qu'il existera un rapport commensurable entre l'une quelconque des deux grandeurs et une autre qui différera aussi peu qu'on voudra de la seconde.

Cela posé, considérons deux grandeurs incommensurables l'une par rapport à l'autre; divisons l'une d'elles, par exemple la plus petite, en parties égales, et portons-les dans la plus grande autant de fois que possible : il y aura un reste moindre que l'une d'elles. Concevons que le nombre des subdivisions égales de la plus petite augmente indéfiniment; pour chacune de ses valeurs le reste de la plus grande diminuera, et deviendra moindre que toute grandeur

donnée. La plus grande quantité diminuée de ce reste aura une mesure commune avec la petite ; elle aura donc avec elle un rapport qui sera le même que celui des nombres de fois qu'elles contiendront cette mesure commune, et sera par conséquent exprimable par une fraction à termes entiers. On aura donc ainsi une suite indéfinie de rapports ou nombres *commensurables* correspondant à la plus petite des deux grandeurs, et à d'autres qui diffèrent de la plus grande, de quantités qui peuvent devenir moindres que toute grandeur désignée.

Concevons d'une autre part deux autres grandeurs incommensurables entre elles et d'une même espèce quelconque ; partageons la plus petite dans les mêmes nombres de parties égales que nous l'avons fait successivement dans le premier cas, et portons-les de même dans la plus grande : il en résultera une nouvelle suite de rapports commensurables, et si ceux qui correspondent de part et d'autre au même mode de division de la plus petite sont toujours égaux, quelque loin qu'on pousse cette division, on dit que les deux premières grandeurs incommensurables ont entre elles *même rapport* ou *même raison* que les deux autres.

75. Cette définition de l'égalité des rapports incommensurables ne diffère pas au fond de celle qui se trouve dans les *Éléments* d'Euclide.

Mais, pour qu'il y ait lieu de l'admettre, il est nécessaire de démontrer que l'égalité des rapports commensurables respectifs est indépendante de la loi suivant laquelle les subdivisions décroissent indéfiniment ; c'est-à-dire que, si cette égalité a lieu pour une certaine loi, elle aura lieu pour toute autre. Cette proposition, qui ne se trouve pas dans Euclide, peut être démontrée comme il suit.

Soient A et B deux grandeurs incommensurables d'une espèce quelconque, et A′, B′ deux autres grandeurs incom-

mensurables, soit de la même espèce que les premières, soit de toute autre. Admettons que si l'on subdivise A et A′ en un même nombre de parties égales, qui croisse indéfiniment suivant une certaine loi déterminée, on trouve constamment le même nombre de ces parties contenues respectivement dans B et B′ : il s'agit de démontrer que si l'on partage A et A′ en un même nombre quelconque $m$ de parties égales, non renfermé dans la loi donnée, il se trouvera toujours un nombre égal de ces subdivisions respectives dans B et B′.

En effet, supposons qu'il y ait un nombre $k$ de ces parties de A dans B, et un nombre différent, par exemple plus grand, des parties de A′ dans B′; alors $k+1$ parties de la première espèce surpasseront B d'une certaine quantité que je désignerai par E, tandis que $k+1$ parties de la seconde espèce seront encore inférieures à B′. Cela posé, décomposons A en parties égales moindres que E, et comprises dans la loi donnée ; décomposons A′ en un nombre égal de parties ; d'après l'hypothèse, il devra s'en trouver respectivement le même nombre dans B et dans B′. Mais il est évident qu'il y aura moins de parties plus petites que E dans B que dans $B+E$, ou dans $k+1$ des subdivisions en question; et il y en aura évidemment autant dans ces $k+1$ subdivisions qu'il y aura de parties correspondantes dans les $k+1$ subdivisions correspondantes de B′, qui donnent cependant une somme inférieure à B′. Donc il y aurait dans B un nombre moindre de parties comprises dans la loi donnée, qu'il n'y aurait de leurs correspondantes dans B′, ce qui est contre l'hypothèse. Il est donc impossible qu'en partageant A et A′ en un même nombre quelconque de parties égales, ces parties ne soient pas respectivement comprises dans B et B′ le même nombre entier de fois.

76. Quant à la définition de l'*inégalité des rapports*

*incommensurables,* elle sera la même que pour les rapports commensurables. On dira toujours qu'un rapport est plus grand ou plus petit qu'un autre, lorsqu'il est celui d'une quantité plus grande ou plus petite que la première à la même seconde quantité. Et l'on appellera toujours *somme* des rapports de plusieurs quantités quelconques à une unité commune, le rapport de la somme des quantités à cette même unité.

77. C'est cette manière générale de considérer les nombres qui a permis à Euclide d'établir des théorèmes généraux dans la comparaison des surfaces ou des solides. Il n'aurait pas pu dire que deux rectangles de même hauteur sont toujours dans le même rapport que leurs bases, ni que deux parallélépipèdes de même base sont dans le même rapport que leurs hauteurs, et tant d'autres propositions analogues n'auraient pu être énoncées généralement, s'il n'avait défini préalablement, non les rapports mêmes, mais l'égalité des rapports dans tous les cas qui peuvent se présenter.

Ce n'est pas que, pour les besoins de la pratique, il y ait beaucoup d'intérêt à donner ce degré de généralité aux théorèmes relatifs à la comparaison, et par conséquent à la mesure, des grandeurs ; car on peut toujours les rendre commensurables en les augmentant ou les diminuant de quantités moindres que toute grandeur désignée. Mais, au point de vue de la théorie pure, il faudrait dire que les propositions ne sont pas générales, et n'ont de sens que quand toutes les grandeurs ont une mesure commune.

78. *Remarque.* — Il est important de reconnaître que, d'après toutes les définitions précédentes, les nombres incommensurables peuvent être considérés comme limites de nombres commensurables variables, croissant ou décroissant.

Considérons, en effet, le rapport de deux grandeurs qui n'ont pas de commune mesure. Partageons la première en un nombre indéfiniment croissant de parties égales, et portons-les dans la seconde autant de fois que possible, nous aurons une quantité commensurable avec la première et qui sera au-dessous de la seconde de moins qu'une partie; de sorte qu'en en ajoutant une de plus, on aura une nouvelle quantité commensurable avec la première, et qui dépassera la seconde de moins qu'une partie entière. Cette dernière étant plus petite que l'une des deux quantités commensurables et plus grande que l'autre, son rapport avec la première sera, d'après nos définitions, plus grand que le premier rapport commensurable et plus petit que le second. Et comme ces deux rapports ne diffèrent l'un de l'autre que du rapport d'une subdivision de la première ligne à cette ligne même, leur différence deviendra moindre que tout nombre donné en augmentant suffisamment le nombre des subdivisions, et il en sera de même à plus forte raison de la différence qu'ils ont l'un et l'autre avec le rapport intermédiaire de la seconde à la première. Ce dernier est donc un nombre fixe, dont des nombres commensurables variables, plus petits ou plus grands, s'approchent de manière que la différence qu'ils ont avec lui peut devenir et rester au-dessous de toute grandeur. Donc, d'après la définition des limites, on a le droit de dire que :

*Tout nombre incommensurable peut être considéré comme la limite d'un nombre commensurable variable, plus petit ou plus grand que lui.*

### DES OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

79. Nous avons vu que tout nombre incommensurable pouvait être regardé comme provenant de la mesure d'une

quantité concrète; nous avons défini l'égalité et l'inégalité, ainsi que l'addition des nombres incommensurables; et enfin nous avons fait voir que ces nombres pouvaient être regardés comme limites de nombres incommensurables variables. Occupons-nous maintenant des règles à suivre pour effectuer sur ces nombres les opérations précédemment examinées pour les nombres commensurables.

Considérons généralement une question qui conduise à une ou à plusieurs opérations successives sur des nombres; que, dans cette question, ces nombres représentent des grandeurs concrètes ou qu'ils aient une origine purement abstraite, auquel cas on pourra les considérer tous, connus ou inconnus, comme mesurant des grandeurs concrètes d'une même espèce quelconque : et que, parmi tous ces nombres, il s'en trouve d'incommensurables. On remplacera ces derniers par des nombres commensurables qui en pourront différer aussi peu qu'on voudra, et l'on exécutera toutes les opérations demandées sur ces nombres, tous commensurables. Le résultat final sera un nombre représentant la quantité concrète de l'espèce indiquée par la question, ou imaginée arbitrairement. Cette quantité concrète variera avec les nombres substitués aux incommensurables, et tendra vers une certaine limite lorsque ces nombres tendront vers les leurs. Or c'est le nombre qui correspondrait à cette limite concrète qu'on appellera le *résultat incommensurable,* ou *commensurable,* des opérations en question.

Il suit de là que toutes les propositions et règles démontrées sur les nombres commensurables subsisteront pour les nombres incommensurables, puisqu'on commence toujours par les remplacer par des nombres commensurables. Ainsi le produit de plusieurs nombres incommensurables sera le même dans quelque ordre qu'on effectue la multiplication; car, cela étant vrai pour les facteurs commensu-

rables qu'on leur substitue, on aura des produits toujours égaux, quelque près qu'ils soient des résultats limites respectifs ; ces derniers sont donc aussi égaux. De même, on peut multiplier ou diviser les deux termes incommensurables d'une fraction par un même nombre quelconque sans changer sa valeur ; car si l'on remplace ses deux termes par des nombres commensurables, leur quotient sera égal à celui qu'on aurait en les multipliant ou les divisant par un même nombre commensurable quelconque ; ces deux quotients, étant toujours égaux quelque près que les trois nombres soient de leurs limites, auront nécessairement la même limite. Le quotient des deux nombres incommensurables ne change donc pas quand on les multiplie ou qu'on les divise par un même nombre incommensurable.

De même aussi, le rapport de deux grandeurs incommensurables d'espèce quelconque est égal au rapport des deux nombres qui expriment leurs rapports à une même unité quelconque.

Il serait superflu de donner d'autres exemples de la proposition générale énoncée ci-dessus ; et nous pouvons regarder comme applicables à tous les nombres les théorèmes et les règles démontrés précédemment sur les nombres considérés dans leur valeur intrinsèque, indépendamment de la forme de leur expression.

## CHAPITRE VIII.

### A QUOI L'ON CHERCHE A RAMENER LA SOLUTION DE TOUTES LES QUESTIONS SUR LES NOMBRES.

80. On peut regarder comme résolu tout problème où la détermination des nombres inconnus est ramenée à exécuter sur des nombres connus des additions, soustractions, multiplications, divisions ou extractions de racines de degré quelconque ; car on a des procédés certains pour effectuer ces opérations sur tous les nombres entiers, fractionnaires ou incommensurables. Aussi est-ce à cela qu'on cherche à ramener la solution de toutes les questions qui ont pour objet la détermination d'un ou de plusieurs nombres inconnus.

Nous verrons plus tard qu'au moyen de tables numériques formées avec beaucoup de travail, une fois pour toutes, on peut regarder comme résolus des problèmes où les nombres inconnus sont ramenés à dépendre autrement de nombres connus. Mais il y a cet inconvénient qu'on ne peut ainsi obtenir que des valeurs approchées des inconnues, et il faut encore ajouter que ces tables ont été formées au moyen des opérations que nous avons rappelées. Elles peuvent donc être regardées comme les éléments de tous les calculs, et demandent par conséquent à être établies pour tous les nombres avec la rigueur que nous y avons mise ; seulement il faut avoir grand soin de n'introduire une difficulté nouvelle que lorsque tout ce qui précède est parfaitement compris, et, par exemple, attendre, pour parler des nombres incommensurables et des règles à suivre pour les calculer, que des questions amenées par le progrès naturel de l'enseignement en aient montré la nécessité.

# CHAPITRE IX.

## EXEMPLES DE PROBLÈMES SIMPLES, RÉSOLUS PAR LA MÉTHODE ANALYTIQUE.

81. Avant de nous occuper de recherches plus générales, nous allons montrer par quelques exemples très-simples que la méthode analytique, telle que nous l'avons définie dans la première Partie de cet Ouvrage, est toujours celle qui se présente naturellement, et la seule qui puisse conduire sans tâtonnement à la solution des questions.

82. Problème I. — *Quel nombre faudrait-il ajouter à chacun des termes de la fraction* $\frac{2}{5}$ *pour en obtenir une égale à* $\frac{9}{13}$?

On ne pourrait raisonnablement espérer résoudre cette question en essayant successivement l'addition de nombres connus aux deux termes 2 et 5 ; car, si le nombre inconnu ne doit pas être entier, on ne saurait quel dénominateur choisir pour les fractions à essayer. Le tâtonnement, qui est toujours un moyen désespéré, ne pourrait donc même pas être tenté. Mais l'analyse donne une solution extrêmement facile.

En effet, puisque les termes 2 et 5 augmentés de l'inconnue donnent une fraction égale à $\frac{9}{13}$, si, pour rendre la comparaison plus facile, on réduit ces deux fractions au même dénominateur, leurs numérateurs seront égaux ; et, réciproquement, s'ils le sont, les fractions sont égales. Et comme la règle pour cette réduction est générale, elle s'ap-

pliquera au cas actuel où l'inconnue qui entre dans les termes de la première peut n'être pas un nombre entier.

La question proposée est donc ramenée à celle-ci :

*Trouver un nombre tel, qu'en l'ajoutant à* 2 *et multipliant la somme par* 13, *on ait le même résultat qu'en ajoutant ce nombre à* 5 *et multipliant la somme par* 9 : *car ce seront là les deux numérateurs après la réduction.*

Le nombre qui résoudra cette question sera précisément celui qu'on cherche.

Cette nouvelle condition peut s'énoncer comme il suit, en exécutant les multiplications :

13 fois 2 plus 13 fois l'inconnue doit être égal à
9 fois 5 plus 9 fois l'inconnue,

ou

26 plus 13 fois l'inconnue doit être égal à
45 plus 9 fois l'inconnue;

et réciproquement.

Or, si l'on retranche de ces deux quantités ce qu'elles ont de commun, c'est-à-dire 26, et 9 fois l'inconnue, les restes devront être égaux; et réciproquement, s'ils le sont, les deux quantités précédentes le seront. Donc la seconde question est ramenée à cette troisième, qui aura identiquement les mêmes solutions que la seconde et la première :

*Déterminer un nombre qui, répété* 4 *fois, produise* 19.

Nous sommes donc parvenus à une question que nous pouvons résoudre, puisqu'elle demande seulement qu'on trouve le quotient de la division de 19 par 4, lequel est $\frac{19}{4}$.

Le nombre qui résout la question proposée est donc $\frac{19}{4}$, de sorte que

$$\frac{2+\frac{19}{4}}{5+\frac{19}{4}} \text{ sera égal à } \frac{9}{13},$$

ce qu'il est facile d'ailleurs de vérifier; et cette vérification ne serait autre chose que la démonstration synthétique de la solution. Mais on voit que la marche synthétique, qui peut bien prouver qu'on a découvert la solution, est impropre à la faire découvrir.

La marche que nous avons suivie est analytique, puisque nous avons ramené le problème à un autre, et celui-ci à un troisième que nous avons pu résoudre ; mais cette analyse n'est pas une décomposition de la chose à connaître en parties, que l'on chercherait séparément pour en former le tout qui était à trouver. Ce n'est donc pas l'analyse de Condillac.

83. Problème II. — *Un père laisse un héritage de* 100 000 *francs qui devra être partagé de la manière suivante entre ses trois enfants : la part du second devra être égale au double de celle du premier, moins* 20 000 *francs, et la part du troisième devra être la moitié de celle du second plus* 10 000 *francs. Quelles seront ces trois parts?*

Il suffit de connaître la première part pour en déduire les deux autres, d'après les conditions qui les lient. Or la détermination de cette inconnue se ramène facilement à la résolution d'une autre question très-simple.

En effet, la seconde part étant 2 fois l'inconnue, moins 20 000, et la troisième la moitié de cela, ou une fois l'inconnue moins 10 000, à laquelle moitié on ajoutera 10 000, ce qui fera une fois l'inconnue, il s'ensuit que les trois parts formeront 4 fois l'inconnue moins 20 000, et cette somme devra être égale à 100 000 francs.

L'inconnue devra donc satisfaire à cette autre question :

*Trouver un nombre tel, qu'en le répétant* 4 *fois, puis retranchant* 20 000, *on obtienne* 100 000.

Et il y a réciprocité entre les deux questions, puisque

4 fois l'inconnue moins 20 000 est la somme de trois nombres déduits du premier comme les parts doivent se déduire de la première; il suffira donc que l'inconnue satisfasse à la condition que cette somme soit 100 000, pour qu'elle satisfasse à la question proposée.

Or, si 4 fois l'inconnue moins 20 000 est égal à 100 000, 4 fois l'inconnue sera égal à 120 000, et réciproquement. L'inconnue sera donc le quart de 120 000, ou 30 000, et réciproquement. La première part sera donc 30 000 francs, et par suite la seconde sera 40 000 francs et la troisième 30 000 francs.

La marche analytique a consisté ici à déduire de la question proposée plusieurs autres questions successives, satisfaites si la première l'était, et réciproquement.

84. Voici un problème un peu moins simple, que nous empruntons à l'Algèbre d'Euler :

Problème III. — *Une paysanne a apporté au marché un certain nombre d'œufs. Elle en vend à une première personne la moitié de ce qu'elle a, plus un demi-œuf; à une seconde, la moitié de ce qui lui en reste, plus un demi-œuf; à une troisième, la moitié du nouveau reste, plus un demi-œuf; enfin à une quatrième, la moitié de ce qui en reste encore, plus un demi-œuf. Après cette dernière vente il ne lui en reste plus; combien en avait-elle apporté?*

Il est d'abord facile de reconnaître à quelle question on peut ramener la proposée. En effet, si l'on part du nombre d'œufs inconnu, et qu'on en déduise le reste après la première vente; qu'on déduise de celui-ci le reste après la seconde, et ainsi de suite jusqu'au reste de la dernière vente, il faudra qu'il soit nul : et réciproquement, s'il l'est, le nombre d'œufs qui le rendra tel satisfera aux con-

ditions données. C'est donc à cette nouvelle question que la première est ramenée.

Or rien n'est plus facile que d'exprimer ce qui reste après chacune des ventes. En effet, elle vend d'abord la moitié du nombre inconnu plus $\frac{1}{2}$ œuf; il reste donc après cela la moitié du nombre inconnu moins $\frac{1}{2}$ œuf. A la seconde vente, elle donne d'abord la moitié de ce reste, plus encore $\frac{1}{2}$ œuf : il reste donc la moitié de ce même reste, moins $\frac{1}{2}$ œuf; ou $\frac{1}{4}$ de l'inconnue, moins $\frac{1}{4}$ d'œuf, moins $\frac{1}{2}$ œuf; après la troisième il restera encore la moitié de ce reste moins $\frac{1}{2}$ œuf; ou $\frac{1}{8}$ de l'inconnue, moins $\frac{1}{8}$ d'œuf, moins $\frac{1}{4}$ d'œuf, moins $\frac{1}{2}$ œuf. Le reste suivant sera encore la moitié de celui-ci, moins $\frac{1}{2}$ œuf; ou $\frac{1}{16}$ de l'inconnue, moins $\frac{1}{16}$ d'œuf, moins $\frac{1}{8}$ d'œuf, moins $\frac{1}{4}$ d'œuf, moins $\frac{1}{2}$ œuf : et ce reste doit être égal à zéro si l'on donne à l'inconnue la valeur cherchée.

La question revient donc à la suivante, avec réciprocité :

*Trouver un nombre tel, que sa seizième partie diminuée de $\frac{1}{16}$, de $\frac{1}{8}$, de $\frac{1}{4}$ et de $\frac{1}{2}$ donne pour reste zéro.*

Et celle-ci revient évidemment à cette autre :

*Trouver un nombre dont le seizième soit égal à la somme de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$, ou $\frac{15}{16}$.*

Or cette dernière question se résout immédiatement, puisque le nombre dont le seizième est le seizième de 15 n'est autre que 15.

La paysanne avait donc apporté 15 œufs au marché. C'est ce qu'on vérifiera facilement, et cette vérification serait la démonstration synthétique de la solution.

85. Notre méthode analytique se reconnaît encore ici, puisque nous avons procédé par déduction avec la démonstration de réciprocité. Mais on ne saurait y voir celle de Condillac, qui consiste à décomposer la chose cherchée en parties plus faciles à connaître, pour en former ensuite la chose elle-même. Nous n'avons employé d'autre décomposition que celle de la vente, telle qu'elle était indiquée par la question, mais non celle de la quantité inconnue ; et nous n'avons pas cherché à connaître les diverses parties de cette inconnue pour la recomposer en les réunissant, comme l'indique l'analyse de Condillac.

86. On aurait bien pu donner une solution dans laquelle on aurait cherché l'expression des différentes parties dans lesquelles on aurait partagé l'inconnue ; mais ce n'aurait pas été pour les connaître séparément et en former la somme, et même on ne l'aurait pas pu. Ce n'eût été qu'un moyen différent de ramener la question proposée à une autre qu'il eût fallu résoudre. On aurait donc encore suivi la méthode de réduction, et non la prétendue méthode analytique de Condillac.

Voici comment on eût alors procédé :

A la première vente la marchande donne la moitié de l'inconnue plus $\frac{1}{2}$ œuf, et il en reste la moitié de l'inconnue moins $\frac{1}{2}$ œuf. Elle donne à la seconde vente $\frac{1}{4}$ de l'inconnue moins $\frac{1}{4}$ d'œuf, plus $\frac{1}{2}$ œuf, et il reste $\frac{1}{4}$ de l'inconnue moins $\frac{1}{4}$ d'œuf, moins $\frac{1}{2}$ œuf. Elle donne donc à la troisième

$\frac{1}{8}$ de l'inconnue, moins $\frac{1}{8}$ d'œuf, moins $\frac{1}{4}$ d'œuf, plus $\frac{1}{2}$ œuf, et il reste $\frac{1}{8}$ de l'inconnue, moins $\frac{1}{8}$ d'œuf, moins $\frac{1}{4}$ d'œuf, moins $\frac{1}{2}$ œuf. A la quatrième vente elle donne donc $\frac{1}{16}$ de l'inconnue, moins $\frac{1}{16}$ d'œuf, moins $\frac{1}{8}$ d'œuf, moins $\frac{1}{4}$ d'œuf, plus $\frac{1}{2}$ œuf.

Or tout ce qu'elle a donné à ces quatre ventes constitue le nombre total des œufs qu'elle a apportés, puisqu'il ne reste plus rien après. D'où résulte cette conséquence :

L'inconnue est égale à la somme des quantités données aux quatre ventes, ou à la moitié de l'inconnue plus $\frac{1}{2}$ œuf, plus $\frac{1}{4}$ de l'inconnue, moins $\frac{1}{4}$ d'œuf, plus $\frac{1}{2}$ œuf, plus $\frac{1}{8}$ de l'inconnue, moins $\frac{1}{8}$ d'œuf, moins $\frac{1}{4}$ d'œuf, plus $\frac{1}{2}$ œuf, plus enfin $\frac{1}{16}$ de l'inconnue, moins $\frac{1}{16}$ d'œuf, moins $\frac{1}{8}$ d'œuf, moins $\frac{1}{4}$ d'œuf, plus $\frac{1}{2}$ œuf.

En opérant les additions et soustractions, on aura l'expression suivante de la même proposition :

L'inconnue est égale aux $\frac{15}{16}$ de l'inconnue, plus $\frac{15}{16}$ d'œuf.

Le nombre qui satisfait à la question proposée doit donc satisfaire à cette condition : et réciproquement, tout nombre qui y satisferait conviendrait à la question, puisqu'en partant de ce nombre et faisant les ventes indiquées par la question on épuiserait exactement ce nombre.

Le problème est donc ramené à celui-ci :

*Trouver un nombre égal à ses $\frac{15}{16}$ plus $\frac{15}{16}$ d'unité.*

Or, de cette condition résulte que $\frac{1}{16}$ du nombre est égal à $\frac{15}{16}$ d'unité, ou à $\frac{1}{16}$ de 15. Ce nombre est donc 15.

On voit donc que les quatre parties dans lesquelles nous avons décomposé le nombre cherché ont servi à ramener la question proposée à une autre, mais qu'elles n'ont point été déterminées elles-mêmes, et que ce n'est pas en ajoutant leurs valeurs que l'on est parvenu à connaître celle de leur somme ou du nombre cherché.

87. Dans ces solutions nous sommes parti du nombre cherché, et nous en avons déduit des conséquences qui nous ont conduit à une autre question dont ce nombre devait être une solution ; et nous avons démontré la réciproque. Nous avons trouvé la solution de cette seconde question, et nous avons eu ainsi celle de la proposée.

Mais, au lieu de *déduire* de la proposée des questions auxquelles l'inconnue doit satisfaire, on aurait pu la *réduire* à une suite d'autres, jusqu'à ce qu'on en rencontrât une dont la solution fût connue. Ce sont là les deux manières de procéder de l'analyse, comme nous l'avons montré dans la première Partie. On choisit celle qui se présente le plus naturellement, et c'est souvent la marche par déduction qui est dans ce cas. Et il peut arriver que la question à laquelle est ramenée la proposée en soit tellement voisine, et qu'elles se déduisent si facilement l'une de l'autre, qu'on ne puisse réellement savoir si l'on y est arrivé par déduction ou réduction, et de laquelle des deux manières il est le plus naturel de la présenter.

88. Pour appliquer la méthode de réduction à la question actuelle, nous partirons du résultat final, c'est-à-dire du dernier reste qui doit être nul, et nous chercherons ce que doit être le précédent pour qu'il conduise à celui-ci.

L'ayant trouvé, nous chercherons ce que doit être le reste qui le précède, pour que celui-ci s'en soit déduit; et, lorsque nous l'aurons trouvé, nous chercherons ce que devait être le nombre proposé qui y a conduit après la première vente. Le problème sera donc résolu par une suite de réductions.

Pour y parvenir, remarquons généralement qu'un quelconque des restes se déduit du précédent en en prenant la moitié et en retranchant $\frac{1}{2}$ œuf.

Or, si un de ces restes est zéro, le précédent a donc été complétement épuisé quand on en a ôté sa moitié et encore $\frac{1}{2}$: il fallait donc que $\frac{1}{2}$ fût la moitié même qui restait, et par conséquent l'avant-dernier reste était 1. La réciproque est évidente. L'antépénultième reste était donc tel, qu'en en ôtant la moitié et $\frac{1}{2}$ il restait 1; donc $\frac{1}{2}$ plus 1 formaient sa seconde moitié, et par conséquent il était 3.

Le reste précédent, qui est le premier, était donc tel, qu'en ôtant sa moitié et $\frac{1}{2}$ il restait 3; sa seconde moitié était donc $\frac{1}{2}$ plus 3; et ce reste était par conséquent 7. Or ce premier reste a été de même déduit du nombre cherché en en retranchant sa moitié plus encore $\frac{1}{2}$; donc sa seconde moitié se composait de $\frac{1}{2}$ et de 7, et le nombre en était le double ou 15.

On retrouve donc la solution de la question, mais par une analyse procédant par réduction au lieu de procéder, comme dans la première marche, par déduction.

89. Problème IV. — *On demande les âges d'un frère et d'une sœur, sachant que leur somme est de* 38 *ans, et*

*que la sœur a le triple de l'âge qu'elle avait lorsque son frère avait* $1\frac{1}{2}$ *fois l'âge qu'elle a aujourd'hui.*

Les conditions de cette question conduisent naturellement à des conséquences qui la ramènent à une autre facile à résoudre, et qui réciproquement entraîne la première.

On voit d'abord qu'il y a deux époques, et que leur distance doit être égale à 2 fois l'âge de la sœur, à la première époque, puisqu'elle a aujourd'hui 3 fois ce même âge. Or à cette époque le frère, ayant $1\frac{1}{2}$ fois l'âge actuel de la sœur, avait donc $4\frac{1}{2}$ fois celui qu'elle avait à la première époque ; et en ajoutant la distance des deux époques, il doit avoir aujourd'hui $6\frac{1}{2}$ fois ce même âge ; de sorte qu'entre eux deux ils ont $9\frac{1}{2}$ fois cet âge.

Et, réciproquement, $9\frac{1}{2}$ fois un nombre quelconque d'années serait décomposable en 3 fois et $6\frac{1}{2}$ fois ce nombre, qui conduiraient à une époque antérieure telle, que les âges à ces deux époques satisferaient à toutes les conditions exigées par la question entre les âges aux deux époques. Il ne reste donc plus qu'à satisfaire à la condition que la somme actuelle des âges soit 38 ans. Il est donc nécessaire et suffisant que le nombre d'années de la sœur à la première époque satisfasse à la question suivante :

*Trouver un nombre qui, multiplié par* $9\frac{1}{2}$, *donne* 38.

Ce nombre est donc le quotient de 38 par $9\frac{1}{2}$ ou 4.

La question est donc satisfaite en donnant 4 ans à la sœur à la première époque, et il n'y a pas d'autre solution.

Son âge actuel sera donc 12 ans, et celui du frère 26 ans.

Dans ce cas encore nous avons déduit des conditions de la question celles d'une autre question plus simple dont la solution entraînait réciproquement celle de la première.

90. *Observation.* — Si nous n'avions pas d'autre but que de résoudre quelques problèmes faciles, nous n'aurions pas donné tant de développements à leurs solutions. Mais nous voulions faire bien reconnaître sur ces exemples simples l'emploi des méthodes générales exposées dans la première Partie, et nous ne voulions pas en détourner l'attention par une trop grande difficulté à suivre les raisonnements.

Dans la plupart de ces solutions nous sommes parti des conditions qui devaient être satisfaites pour que la question proposée fût résolue, et en admettant qu'elles le fussent, nous en avons déduit d'autres qui devaient aussi l'être, et conduisaient à une nouvelle question qui devait être résolue si la première l'était, et réciproquement.

Nous avons aussi donné des exemples de solution par réduction, c'est-à-dire en cherchant une question dont les conditions entraînaient comme conséquences celles de la proposée, et démontrant la réciprocité. De ces deux manières de procéder de l'analyse, la première est plus souvent employée peut-être, parce qu'il est plus facile de tirer des conséquences de rapports admis, que de reconnaître de quels rapports ils seraient eux-mêmes les conséquences. Mais il n'y a pas de règle générale à cet égard ; on prendra celle des deux marches qui se présentera le plus naturellement : on pourra les employer alternativement dans la même question. L'important est de bien s'assurer de la réciprocité.

# CHAPITRE X.

## SIGNES PROPRES A SIMPLIFIER LE LANGAGE ET L'ÉCRITURE.

91. Dans la résolution des problèmes précédents, nous avons employé le langage et l'écriture ordinaires, et l'on a pu remarquer l'embarras et les longueurs qui en résultaient. C'est ainsi que faisaient les anciens, du moins dans la publication de leurs découvertes ; car il est vraisemblable qu'ils avaient pour eux-mêmes une écriture plus commode.

Dorénavant, nous désignerons de la manière suivante les diverses opérations sur les nombres :

Le signe $+$ placé entre deux nombres indiquera qu'ils doivent être ajoutés ; le signe $-$ qu'ils doivent être retranchés. La multiplication s'exprimera par le signe $\times$ ou plus simplement par un point interposé entre les deux facteurs. La division continuera à s'exprimer par une barre placée entre les deux termes mis l'un au-dessus de l'autre, ou par deux points placés entre ces termes, placés alors sur la même ligne. Ainsi le quotient de 5 par 13 s'écrira de cette manière, $\frac{5}{13}$, ou de cet autre, $5 : 13$. La puissance de degré quelconque d'un nombre s'exprimera en écrivant le nombre qui marque ce degré, à la droite et un peu au-dessus du nombre en question; ainsi la cinquième puissance de 3 s'écrira de cette manière, $3^5$. La racine de degré quelconque s'exprimera par ce signe $\sqrt{\ }$; on mettra au dedans le nombre dont il faut l'extraire, et dans l'angle le degré.

Ainsi la racine cinquième de 23 s'écrira $\sqrt[5]{23}$.

Pour exprimer que deux quantités sont égales, on mettra entre elles le signe $=$.

Pour exprimer l'inégalité, on se sert du signe $>$, en tournant l'ouverture du côté de la plus grande.

Ainsi l'on écrira, par exemple,

$$2+3=5, \quad 8>5, \quad 4<9.$$

Enfin nous désignerons les nombres inconnus par de simples lettres, au lieu des dénominations employées ci-dessus.

92. Reprenons avec ces signes les calculs précédents.

Dans le premier problème, désignons par $x$ le nombre à ajouter aux deux termes de $\frac{2}{5}$; la condition à satisfaire s'exprimera par l'égalité ou équation suivante :

$$\frac{2+x}{5+x}=\frac{9}{13}.$$

Réduisant au même dénominateur, les numérateurs devront être égaux, et réciproquement. Il en résulte

$$26+13x=45+9x.$$

De ces deux quantités égales, si l'on ôte ce qui leur est commun, il en résultera deux quantités égales ; d'où l'équation

$$4x=19,$$

et, par suite,

$$x=\frac{19}{4},$$

comme nous l'avions trouvé.

93. Dans le second problème, si $x$ désigne la part du premier enfant, la part du second sera $2x-20000$, et celle du troisième, $x-10000+10000$ ou simplement $x$.

Or, si $x$ est bien le nombre cherché, il en résultera que la somme de ces trois expressions sera égale à 100 000, et réciproquement. La solution de la question est donc ramenée à celle qu'exprime l'équation suivante :

$$x + 2x - 20000 + x = 100000,$$

ou

$$4x - 20000 = 100000;$$

d'où résulte

$$4x = 120000$$

et

$$x = 30000.$$

Les deux autres parts sont donc 40 000 et 30 000.

94. Dans le troisième problème, représentons par $x$ le nombre des œufs que la paysanne a apportés au marché. Elle donne à sa première vente

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2},$$

et du nombre total $x$ il restera

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2},$$

dont elle doit donner la moitié et encore $\frac{1}{2}$ œuf.

Elle donne donc à la seconde vente

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

et il lui reste

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{\cancel{3}} - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4}$$

dont elle donnera pour la troisième vente la moitié et $\frac{1}{2}$ œuf, c'est-à-dire

$$\frac{x}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

et il lui restera par suite

$$\frac{x}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}.$$

Enfin, en en vendant la moitié plus $\frac{1}{2}$ œuf, ou

$$\frac{x}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

il lui en restera

$$\frac{x}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2},$$

qui doit se réduire à zéro d'après l'énoncé; ce qui ramène la question à trouver le nombre qui satisfait à l'équation

$$\frac{x}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0,$$

ou, en réduisant tous les termes au même dénominateur 16,

$$\frac{x - 1 - 2 - 4 - 8}{16} = 0.$$

Le numérateur devra donc être nul, ce qui donne

$$x - 15 = 0 \quad \text{ou} \quad x = 15.$$

95. Enfin, si dans le quatrième problème on désigne par $x$ l'âge de la sœur à la première époque, son âge actuel sera $3x$; celui du frère, à la première époque, sera

$$3x + \frac{3x}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{9x}{2}.$$

Il aura donc aujourd'hui

$$\frac{9x}{2} + 2x \quad \text{ou} \quad \frac{13x}{2};$$

et comme la somme des deux âges actuels est 38, on aura, comme conséquence de la question, l'équation

$$3x + \frac{13x}{2} = 38,$$

et il y aura réciprocité. On en déduit

$$\frac{19x}{2} = 38,$$

d'où

$$x = 38 : \frac{19}{2} = 4.$$

Les deux âges sont donc aujourd'hui 12 et 26, comme nous l'avions trouvé.

96. La supériorité de cette notation sur l'écriture ordinaire ressort bien évidemment de la comparaison de ces derniers calculs avec les premiers; et l'avantage serait bien plus grand encore si les expressions étaient plus compliquées. Les commençants ne le sentent pas assez, parce qu'on leur donne trop tôt les procédés de simplification dont ils n'ont pas reconnu l'indispensable nécessité. Il faut leur faire résoudre péniblement des questions à leur portée, et leur faire désirer et pressentir les moyens de simplification ; et lorsqu'ils seront assez avancés pour suivre la lecture des énoncés de certaines propositions d'Archimède, il sera bon de leur montrer qu'un énoncé exprimé par une demi-page en langage ordinaire peut l'être par une seule ligne, ou deux au plus, en se servant de nos notations. Si l'énoncé est déjà si difficile à suivre qu'arrivé à la fin on a

oublié le commencement, et qu'il faudrait le relire un grand nombre de fois pour le retenir, qu'on juge de la difficulté de comprendre tous les détails de la solution et d'en retenir la liaison qui est si nécessaire pour l'intelligence bien nette de la conclusion.

Nous le répétons, il ne faut pas faire connaître trop tôt les moyens perfectionnés que les hommes ont mis des siècles à découvrir; en toutes choses le passé donne des enseignements indispensables, sans lesquels on ne comprend pas le présent; et il ne faut pas croire que l'enseignement sera retardé par ces longueurs apparentes. On a toujours gagné quand on a appris à mieux comprendre ce que l'on fait, et quand on connaît bien les raisons des choses, on est plus apte à en découvrir de nouvelles; ce qui doit être en grande partie le but de l'enseignement; car la vie des hommes ne peut être réglée comme les fonctions d'une machine, et ce qu'on doit tâcher de leur donner, ce sont des méthodes pour résoudre le mieux possible les questions imprévues.

# CHAPITRE XI.

## DES MOYENS D'OBTENIR LA GÉNÉRALITÉ DANS LES RÉSULTATS.

97. Dans toute question qui a pour objet de trouver la valeur d'une ou de plusieurs choses inconnues, il y a une distinction importante à faire. D'une part, on aura à considérer les valeurs particulières des données, et d'une autre part les différents rapports que les inconnues doivent avoir entre elles et avec ces données. Ces rapports constituent la nature de la question, et les valeurs particulières des données en constituent des cas particuliers dont le nombre est illimité.

Or on peut se proposer de trouver la solution d'une question d'une nature bien définie en ne tenant compte que de cette nature et indépendamment des valeurs particulières des données : c'est ce qu'on appellera la *solution générale* de cette question.

En réfléchissant à ce que peut être la solution d'une question où aucun nombre n'est fixé et où l'on ne connaît que les conditions qui les lient avec ceux que l'on cherche, on comprend qu'on ne peut se proposer autre chose que de déterminer la suite d'opérations connues qu'il faudrait exécuter sur les données pour obtenir les inconnues; et c'est aussi là ce que nous nous proposons.

Nous dirons donc que :

« La solution générale d'une question d'une espèce désignée consiste dans l'indication des opérations connues

qu'il faut effectuer dans tous les cas particuliers pour en obtenir la solution.

Cette indication s'appelle une *formule*.

Et ce que nous venons de dire ne s'applique pas uniquement à des questions de nombres; seulement la nature des opérations dépend de celle des choses dont il s'agit. Ainsi la solution générale d'un problème de Géométrie est l'indication des constructions à faire pour obtenir dans tous les cas particuliers ce qui est demandé, et cette indication sera une *formule de construction*. Il en serait de même pour des choses de tout autre genre.

98. Voyons comment il sera possible d'obtenir cette généralité pour les questions de nombres.

Déjà nous avons obtenu des propositions et des règles générales en prenant des nombres quelconques pour représenter les données et raisonnant sans tenir compte de leurs valeurs particulières. La manière dont ces nombres entraient dans les résultats nous apprenait comment y seraient entrés tous autres nombres, et, par conséquent, ces résultats étaient généraux; mais cette manière de procéder avait d'assez grands inconvénients. D'abord il fallait que tous les nombres choisis fussent différents, pour ne pas être confondus entre eux; il fallait une grande attention pour n'effectuer aucun calcul, mais seulement les réductions qui auraient été amenées dans tous les cas; et si ces réductions avaient introduit des nombres déjà choisis pour représenter des données, il en pouvait résulter à la fin quelque confusion. On a donc dû renoncer à ce procédé dès que les questions se sont un peu compliquées.

Mais il est un moyen aussi simple et qui n'est sujet à aucun inconvénient : c'est de représenter les nombres donnés par d'autres signes quelconques que des nombres. On ne sera plus tenté alors d'exécuter les opérations qui se

présenteront; les réductions pourront sans inconvénient introduire des nombres qui ne sauraient faire confusion avec les signes choisis, et la manière dont ceux-ci entreront dans la composition du résultat sera précisément la formule qui résoudra la question d'une manière générale. Les signes qu'il était naturel de choisir sont les lettres de l'alphabet. Ce procédé se résume alors de la manière suivante :

« Pour résoudre généralement toutes les questions d'une même espèce déterminée, on représentera les divers nombres donnés par des lettres différentes, et l'on suivra identiquement la même marche que s'il s'agissait de résoudre une question particulière de la même espèce. Quand on sera parvenu à la détermination des inconnues, ce ne seront plus des nombres que l'on aura obtenus, mais des indications d'opérations à faire sur les nombres que les lettres remplacent. Ce seront donc les formules qui résoudront d'une manière générale la question proposée. »

99. Les résultats généraux ne sont pas seulement utiles pour dispenser de recommencer pour chaque cas particulier les mêmes raisonnements et les mêmes calculs; ils sont souvent indispensables pour pouvoir traiter d'autres questions, même particulières, mais où il y a des nombres inconnus; car, si l'on n'avait pas démontré pour tous les nombres les propositions dont on fait usage, on n'aurait pas le droit de les appliquer aux inconnues. Si, par exemple, on combine une suite de proportions renfermant des inconnues, il faut, comme nous l'avons déjà remarqué, s'être assuré que les propositions qu'on applique ont lieu pour tous les nombres.

100. Pour donner des exemples de ce procédé de généralisation, cherchons les formules qui donnent les solutions générales de quelques-uns des problèmes précédents.

*Soit* $\frac{a}{b}$ *une fraction donnée, on demande la valeur de* $x$ *par la condition que* $\frac{a+x}{b+x}$ *soit égal à une autre fraction donnée* $\frac{c}{d}$.

Cette condition s'exprimera par l'égalité

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{c}{d},$$

d'où, en réduisant au même dénominateur et égalant les numérateurs,

$$a.d + d.x = b.c + c.x,$$

ce que l'on écrira ainsi :

$$ad + dx = bc + cx,$$

en convenant que deux lettres placées à côté l'une de l'autre, sans signe interposé, sont censées multipliées entre elles.

Jusqu'ici il n'y a eu aucune difficulté à reproduire les raisonnements faits précédemment sur des nombres particuliers; mais pour continuer il faut savoir lequel est le plus grand de $c$ et de $d$. Supposant que l'on a $c < d$, $cx$ sera commun aux deux quantités égales, et, en le supprimant, ainsi que $ad$, on aura

$x$ multiplié par $d - c$ égal à $bc - ad$;

ce que nous écrirons ainsi :

$$x(d - c) = bc - ad,$$

en convenant, une fois pour toutes, que quand une expression quelconque sera mise entre deux parenthèses, on entend que c'est au résultat des opérations qui y sont indiquées que s'appliquent les autres indications extérieures.

La valeur de $x$ qui satisfait à la dernière équation est

$$x = \frac{bc - ad}{d - c}.$$

Telle est la formule qui résout généralement la question. Et l'on trouverait $x = \frac{ad - bc}{c - d}$ si l'on avait $c > d$.

101. *Un père laisse un héritage a, qui doit être partagé de la manière suivante entre ses trois enfants : la part du second doit être égale à m fois celle du premier, moins b ; et la part du troisième, la $n^{\text{ième}}$ partie de celle du second, plus c. Quelles sont les trois parts ?*

Si la première part est désignée par $x$, la seconde le sera par $mx - b$, et la troisième par $\frac{mx - b}{n} + c$.

Si ce sont là les trois parts, leur somme sera $a$, d'où résulte la relation suivante :

$$x + mx - b + \frac{mx - b}{n} + c = a.$$

La question proposée est donc ramenée à la solution de celle qui est exprimée par cette relation. Si l'on multiplie par $n$ les deux quantités égales, les produits seront égaux, et réciproquement; et comme nous savons qu'on multiplie une somme ou une différence en multipliant tous les termes, la solution de l'équation précédente se ramène à celle de la suivante :

$$nx + nmx - nb + mx - b + nc = an,$$

ou

$$x(n + nm + m) - nb - b + nc = an;$$

ajoutant de part et d'autre $nb + b$ et retranchant $nc$, on est ramené à

$$x(n + nm + m) = an + nb + b - nc,$$

d'où

$$x = \frac{an + nb + b - nc}{n + nm + m}.$$

Telle est la solution de la question générale. Pour l'appliquer au cas particulier précédent, il faudrait supposer

$$a = 100000, \quad m = 2, \quad b = 20000, \quad n = 2, \quad c = 10000,$$

et la formule donnerait $x = 30\,000$, comme nous l'avions trouvé en traitant directement ce cas particulier.

**102.** Résolvons encore généralement le quatrième des problèmes précédents.

*Soit a la somme des âges du frère et de la sœur. La sœur doit avoir aujourd'hui m fois l'âge qu'elle avait lorsque son frère avait n fois celui qu'elle a aujourd'hui. Quels sont ces âges?*

Soit $x$ l'âge qu'avait la sœur à la première époque; elle aura aujourd'hui l'âge $mx$, et par conséquent la distance des époques sera $mx - x$. Le frère devait avoir $nmx$ à la première époque, et par conséquent il a aujourd'hui $nmx + mx - x$; et, comme la somme de leurs âges actuels est $a$, on devra avoir

$$mx + nmx + mx - x = a.$$

La solution de la question proposée l'est donc de celle qu'exprime cette relation, et réciproquement.

Cette égalité peut s'écrire ainsi :

$$x(2m + nm - 1) = a;$$

$x$ est donc le quotient de $a$ par $2m + nm - 1$, ou

$$x = \frac{a}{2m + nm - 1}.$$

Cette solution générale donnerait celle du cas particulier que nous avons traité, en donnant à $a$, $m$, $n$ les valeurs suivantes :

$$a = 38, \quad m = 3, \quad n = \frac{3}{2}.$$

103. *Remarque.* — Il est juste de dire que dans Euclide et Archimède les nombres sont souvent représentés par de simples lettres quand on veut parvenir à des propositions générales; mais on n'y trouve aucun signe pour indiquer les opérations à exécuter; le langage ordinaire est employé à cet effet, ce qui rend les démonstrations très-difficiles à suivre. Quelquefois Euclide représente les nombres par des lignes, ce qui lui permet de représenter de même le résultat d'additions ou de soustractions, et même de multiplications ou divisions.

# CHAPITRE XII.

## DES OPÉRATIONS SUR LES QUANTITÉS DONT L'EXPRESSION EST LITTÉRALE.

104. Les quantités dont il s'agit n'étant données que par l'indication des opérations à faire pour les obtenir, le résultat d'opérations quelconques à effectuer sur elles ne peut être aussi qu'une indication d'opérations; mais ce qu'on demande, c'est l'indication la plus simple.

Nous ne nous occuperons pas des règles à suivre pour obtenir ce résultat; nous renvoyons pour cela aux traités spéciaux, et nous ne nous proposons ici que d'éclaircir les points qui peuvent offrir quelque difficulté et de faire ressortir l'application des méthodes exposées dans notre première Partie, d'où peuvent souvent résulter des méthodes particulières propres à la science que nous étudions.

Nous admettrons donc comme bien établis les procédés pour effectuer sur les monômes et les polynômes des additions, soustractions, multiplications, divisions et extractions de racines, et nous nous bornerons à quelques remarques nécessaires pour éviter toute fausse interprétation.

### RÈGLE DES SIGNES DANS LA MULTIPLICATION DES POLYNÔMES.

105. Quand on multiplie deux polynômes l'un par l'autre, les différents termes du produit sont toujours formés par la multiplication d'un terme du multiplicande par un terme du multiplicateur; le signe de ce terme est $+$ quand les deux termes qu'on a multipliés ont le même signe dans

leurs polynômes respectifs; et le signe est — quand ils ont des signes différents. Dans cette manière d'énoncer la règle, on entend que le premier terme qui n'est précédé d'aucun signe sera regardé comme affecté du signe +, signe qu'il aurait effectivement si on le changeait de place dans le polynôme. Cette règle des signes a été démontrée sans difficulté, et nous l'admettrons; mais nous ferons bien observer qu'elle n'a de sens et qu'elle n'a été démontrée que dans le cas où les termes affectés du signe — sont précédés de termes additifs dont ils doivent être retranchés.

**106.** Quant à l'ordre des termes dans ces polynômes, il peut être choisi pour certains avantages, de telle sorte que les termes négatifs ne soient pas précédés d'assez de termes positifs pour pouvoir être retranchés. Mais il faut toujours entendre que l'ensemble des termes négatifs est à retrancher de l'ensemble des termes positifs, et faire les démonstrations dans ce sens. Et s'il est plus commode d'ordonner les termes de manière à leur faire indiquer des opérations impossibles, et même de commencer par un terme négatif, il n'y a aucun inconvénient, pourvu qu'on suive les règles démontrées d'après la signification réelle, et qui donneront le même résultat, sauf l'ordre des termes, que l'on trouverait en disposant les termes des polynômes sur lesquels on opère, de manière à éviter toute indication d'opération impossible.

Et quant à la composition des termes du produit, on reconnaît facilement qu'ils résultent toujours de la multiplication d'un terme du premier par un terme du second; que chaque terme du premier sera ainsi combiné avec tous ceux du second, mais une seule fois avec chacun; de sorte qu'on aura les mêmes termes identiquement au produit, quel que soit celui des deux polynômes qu'on prenne pour le multiplicande.

D'après cette remarque, si ce produit devait être multiplié par un troisième polynôme, les termes de ce nouveau produit résulteraient nécessairement de la multiplication de trois termes pris respectivement dans les trois polynômes, et toute combinaison d'un terme du premier par un du second et un du troisième s'y trouvera une seule fois; de sorte qu'on aura encore les mêmes termes dans le produit de trois polynômes, quelque ordre qu'on mette dans leur multiplication.

Et cette remarque se faisant continuellement en multipliant les produits successifs par un nouveau polynôme, on arrive à cette proposition que :

« Le produit d'un nombre quelconque de polynômes est le même dans quelque ordre qu'on les multiplie; que chaque terme du produit se forme de la multiplication de termes pris respectivement dans chacun des polynômes; que toute combinaison de ces termes ainsi faite, sans tenir compte de l'ordre, concourt à former un terme du produit, mais ne se rencontre qu'une fois. »

### RÈGLE DES SIGNES DANS LA DIVISION DES POLYNÔMES.

**107.** Lorsqu'un polynôme donné doit résulter de la multiplication d'un autre polynôme donné par un polynôme inconnu qui sera le quotient, on cherche d'abord le terme de ce quotient qui contient à la plus forte puissance une des lettres qui entrent dans le dividende et le diviseur. Or il suffit pour cela de remarquer que c'est le produit de ce terme par celui du diviseur où cette même lettre est à la puissance la plus élevée, qui donne le plus élevé du dividende; et, comme la multiplication se fera par la règle des signes démontrée précédemment, le signe du terme du quotient en résultera, et sera $+$ si les deux termes de

degré le plus élevé du dividende et du diviseur ont le même signe ; il sera — si ces termes ont des signes différents. Et nous n'avons pas besoin de rappeler que le premier terme sans signe est regardé comme affecté du signe +.

Cette proposition n'implique pas que l'on attache un sens à la division de quantités négatives isolées; elle est une simple conséquence des règles démontrées pour la multiplication, et il faut bien prendre garde à ce que le langage abrégé par lequel on énonce cette règle ne fasse même pas soupçonner que l'on attache un sens à une quantité isolée précédée du signe —, qui n'indiquerait pas qu'elle doit être retranchée d'une plus grande. Disons même qu'il n'y aurait aucun sens à attacher à une quantité positive isolée; car que signifierait le signe + mis devant une quantité qui ne doit être ajoutée à aucune autre ?

### DU DIVISEUR DE DEGRÉ LE PLUS ÉLEVÉ DE DEUX POLYNÔMES.

108. On dit qu'un polynôme est diviseur d'un autre, relativement à une certaine lettre qui ne se trouve dans les dénominateurs d'aucun de ses termes, lorsqu'il existe un troisième polynôme, entier lui-même par rapport à cette lettre, qui, multiplié par le premier, reproduise le second.

A ce point de vue, les coefficients des diverses puissances de la lettre principale peuvent être fractionnaires relativement aux autres lettres ou nombres particuliers; et, par conséquent, ce diviseur, multiplié ou divisé par une quantité quelconque indépendante de la lettre principale, sera encore un diviseur du même polynôme multiplié lui-même ou divisé par une quantité indépendante de cette lettre.

La question que nous nous proposons est de trouver le polynôme du degré le plus élevé qui en divise exactement

deux autres sous ces conditions, ou leur plus grand commun diviseur, relativement à la lettre désignée.

Soient ces deux polynômes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de cette lettre $x$

$$(1) \qquad Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Tx + U,$$

$$(2) \qquad ax^n + bx^{n-1} + \ldots + px + q,$$

et supposons $m > n$.

S'il y a un diviseur commun à ces deux polynômes, il sera tout au plus du degré $n$, sans quoi, en le multipliant par un quotient quelconque, on ne pourrait reproduire (2); il n'en serait donc pas diviseur. Or, s'il est de degré $n$, le quotient de (2) par ce diviseur devra être indépendant de $x$, et par conséquent pourra être considéré comme (2) lui-même, puisque nous ne tenons aucun compte des facteurs ou diviseurs indépendants. Il convient donc d'essayer si (2) ne serait pas diviseur de (1), car alors il serait le polynôme de degré le plus élevé qui divise (1) et (2), et il résoudrait la question.

Si cette division donne un reste, tout polynôme qui divisera les deux proposés divisera ce reste, qui a été obtenu en retranchant du premier le produit du second par le quotient. Et réciproquement, tout polynôme qui divisera ce reste et le diviseur divisera le dividende; de sorte que les diviseurs des deux polynômes proposés ne diffèrent pas de ceux du second et du reste. La question est donc ramenée à trouver le polynôme de degré le plus élevé qui divisera le second polynôme et le reste. Cette nouvelle question étant semblable à la première, on agira de la même manière, c'est-à-dire qu'on essayera la division du second polynôme par le reste; si elle réussit, ce dernier sera le plus grand diviseur cherché.

Si elle ne réussit pas, on sera ramené à une question

semblable sur le premier reste et celui de cette nouvelle division, qui sera d'un degré moindre. Et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on arrive, ou à une division qui réussisse, auquel cas le dernier diviseur sera le plus grand commun diviseur cherché; ou à un reste indépendant de $x$, auquel cas il n'y aura évidemment aucun polynôme en $x$ qui divise les deux proposés.

# CHAPITRE XIII.

## DE LA MISE EN ÉQUATION DES PROBLÈMES, OU DE LEUR RÉDUCTION AU PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

109. Lorsqu'un problème a pour objet la détermination d'un ou de plusieurs nombres, et qu'on l'a ramené, avec réciprocité, à un autre problème consistant à trouver les valeurs de ces mêmes nombres par la condition qu'ils satisfassent à des équations entre eux et les nombres donnés, on dit qu'on a mis ce problème en équation.

Dans les problèmes que nous avons résolus précédemment, nous n'avons introduit qu'une seule inconnue, et nous sommes parvenus à une équation où elle se trouvait mêlée à des nombres connus. La question était ainsi ramenée à trouver quelle valeur il fallait donner au nombre désigné par $x$ pour que l'égalité eût lieu.

Cette réduction du problème à la *résolution* d'une ou de plusieurs équations est très-importante, parce que l'on a des procédés généraux pour traiter cette dernière question, et que ces procédés conduisent d'une manière sûre aux valeurs des inconnues pour des classes d'équations très-diverses. Quand le problème conduit à des équations de cette espèce, il peut être regardé comme résolu dès qu'il est mis en équation.

Si l'on n'a pas démontré que les équations entraînent comme conséquences toutes les conditions de la question, mais seulement qu'elles en sont des conséquences, elles pourront renfermer des solutions étrangères ; et au con-

traire il pourrait y en avoir de perdues si l'inverse avait lieu.

Cela posé, cherchons un procédé général pour mettre les problèmes en équation.

On remarquera d'abord que, si l'on s'est bien pénétré de toutes les conditions de la question, on doit être généralement en état de vérifier si des nombres désignés y satisfont ; et c'est même là un premier exercice très-utile pour les élèves. Cela posé, si l'on représente les nombres inconnus par des lettres et qu'on indique sur eux et sur les données précisément les mêmes opérations que l'on aurait faites sur des nombres particuliers pour vérifier s'ils conviennent, les comparaisons auxquelles cette vérification aurait nécessairement conduit seront changées en relations nécessaires et suffisantes pour que les inconnues satisfassent à la question.

Cette marche consistera donc, si l'on procède par déduction, à partir des conditions de la question, à en tirer des conséquences en les supposant satisfaites, jusqu'à ce que l'on arrive aux comparaisons d'où résulteront les équations : et par conséquent c'est la méthode analytique qui conduira aux équations du problème. Et si l'on procède par réduction, on suivra encore la marche analytique. Mais dans l'un ou l'autre cas, si la réciprocité n'a pas lieu, il y aura des solutions étrangères ou des solutions perdues.

Si la question doit conduire à plusieurs équations, la vérification se décomposera naturellement en plusieurs autres dont on s'occupera successivement. Toutes les fois qu'une question peut être décomposée en plusieurs autres, on commence par opérer cette réduction, qui est la première chose indiquée par l'analyse.

**110.** Telle est la marche générale à suivre pour ramener les problèmes à des résolutions d'équations. Son applica-

tion varie avec la nature de la question, et peut offrir des difficultés lorsque les conditions sont compliquées; mais on n'en peut dire davantage tant que la nature de ces conditions reste indéterminée; et l'on en comprendra tout l'avantage si l'on réfléchit que, quand des conditions sont bien comprises, il doit en général être assez facile de vérifier si elles sont remplies.

Cette règle est indépendante de la nature, tant des questions proposées, que des équations auxquelles elle conduit. Il y a des classes d'équations pour lesquelles on peut donner des procédés généraux de résolution; il en est d'autres pour lesquelles on n'en connaît pas. Mais, dans tous les cas, cette réduction des problèmes à la résolution des équations est un premier pas nécessaire; et le problème auquel on est ainsi ramené forme une partie considérable de la science des nombres.

C'est de ce problème que nous allons commencer à nous occuper.

# CHAPITRE XIV.

## DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

111. Lorsque les différents termes des équations ne renferment les inconnues que comme facteurs, et qu'elles n'y sont multipliées ni par elles-mêmes, ni les unes par les autres, ces équations sont dites *du premier degré*. Le cas le plus simple est celui où il n'y a qu'une seule inconnue : c'est par là que nous allons commencer.

### ÉQUATIONS A UNE SEULE INCONNUE.

112. Une équation du premier degré à une seule inconnue ne peut avoir que deux espèces de termes, les uns tout connus, les autres renfermant comme facteur l'inconnue au premier degré.

Pour diriger la suite des déductions ou réductions à faire, il suffit de remarquer que l'équation sera résolue si elle est ramenée à une autre dont un des membres soit l'inconnue et l'autre un nombre connu : c'est donc vers cette forme d'équation qu'il faut tendre.

Toutes les transformations des équations sont fondées sur cette considération évidente qu'en effectuant une même opération quelconque sur les deux membres qui sont égaux, on a des résultats égaux. De là se déduisent immédiatement les règles pour faire disparaître tous les dénominateurs, et pour faire passer les termes d'un membre dans l'autre.

Cela posé, on voit qu'on aura fait un pas vers la forme

cherchée, en faisant passer tous les termes connus dans un même membre et tous les termes inconnus dans l'autre. On aura ainsi une nouvelle équation qui sera la conséquence de la première, et réciproquement.

On en déduira une autre plus voisine encore de celle à laquelle on veut arriver, en réunissant tous les multiplicateurs de l'inconnue, avec les mêmes signes que les termes correspondants. Cette nouvelle équation indiquera que le produit de l'inconnue par un nombre connu est égal à un autre nombre connu. L'inconnue est donc égale au quotient de ce dernier par le facteur connu, et le problème est résolu.

113. Cette marche est générale, et son application ne peut offrir aucune difficulté. Néanmoins la formule générale que l'on déduirait d'une équation où les données seraient représentées par des lettres pourrait, dans certains cas particuliers, prendre une forme singulière; et il est bon d'en prévenir, afin d'éviter quelques embarras, ou de fausses interprétations. C'est ce que nous allons faire brièvement.

Représentons par

$$(1) \qquad Ax = B$$

l'équation à laquelle on est parvenu en faisant passer tous les termes connus dans un membre, et tous les termes inconnus dans l'autre. On en tire

$$(2) \qquad x = \frac{B}{A},$$

et dans chaque cas particulier on connaîtra la valeur de $x$, en mettant dans A et B les valeurs particulières données aux quantités représentées par les lettres.

Or, pour certaines valeurs particulières de ces lettres, il pourrait arriver que la somme des termes positifs fût égale à

celle des négatifs dans A ou B, ou même dans tous les deux; il pourrait même arriver que la somme des termes négatifs fût supérieure à celle des termes positifs. Dans le premier cas, A ou B serait zéro; dans le second, après avoir ôté de l'ensemble des termes positifs un nombre égal, il resterait l'indication de la soustraction d'un nombre de rien, par exemple — 5. Quelles conséquences doit-on tirer des formes singulières que prend la formule (2) et qui sont représentées, les premières par

$$x = \frac{0}{A}, \quad x = \frac{B}{0}, \quad x = \frac{0}{0},$$

les secondes par

$$x = \frac{-M}{N}, \quad x = \frac{M}{-N}, \quad x = \frac{-M}{-N},$$

où nous désignons par M, N les nombres équivalents à l'excès de la somme la plus grande sur la plus petite, quelle que soit celle qui l'emporte dans A ou B? Nous allons examiner successivement toutes ces formes.

114. Nous dirons d'abord généralement que lorsqu'une proposition déduite d'autres propositions présente dans certains cas particuliers quelque chose d'obscur et quelquefois même d'inintelligible, ce n'est pas en elle-même qu'il faut l'étudier, et c'est malheureusement ce que l'on fait trop souvent. C'est aux propositions précédentes qu'il faut remonter; il faut examiner ce qu'elles deviennent dans ce cas particulier et quelles conséquences elles peuvent donner alors. Sans doute, il aurait mieux valu tout prévoir avant de tirer la conséquence générale, et alors rien n'aurait plus embarrassé; mais, si on ne l'a pas fait d'abord, il faut le faire quand le besoin s'en fait sentir; et c'est ainsi que nous allons éclaircir tout ce que les six expressions précédentes peuvent présenter de singulier.

1° Si dans l'équation (1) B se trouve égal à zéro, $x$ doit

être tel, que multiplié par un nombre il donne un produit nul ; il est donc nul lui-même. La forme $\frac{0}{A}$ indique donc zéro.

2° Si $A = 0$ seulement, les termes en $x$ se détruisent dans (1) ; et B n'étant pas nul, l'équation est impossible. La forme $\frac{B}{0}$ annonce donc l'impossibilité de satisfaire à l'équation, et par suite à la question dont elle était la conséquence.

3° Si l'on a à la fois $A = 0$, $B = 0$, tous les termes se détruisent, quelque valeur qu'on suppose à $x$, et l'équation (1) sera toujours satisfaite ; la forme $\frac{0}{0}$, que donne dans ce cas la formule générale de $x$, annonce donc une indétermination complète. Tous les nombres conviennent à la question.

4° Si, en effectuant les additions et les soustractions dans A et B, on trouve qu'elles sont possibles dans l'un, mais impossibles dans l'autre, parce qu'il resterait l'indication d'une soustraction à effectuer quand il ne resterait plus rien, d'où il résulterait qu'en faisant passer tous les termes dans un même membre la somme de deux quantités devrait être nulle, tandis que l'une des deux au moins ne l'est pas : il n'y a donc aucun nombre qui satisfasse à l'équation (1), et, si elle est une conséquence nécessaire de la question, celle-ci ne peut non plus être satisfaite par aucun nombre.

5° Enfin, si les deux expressions A et B sont négatives, c'est-à-dire si les soustractions sont impossibles dans l'une et l'autre, cela annonce seulement que dans l'ignorance où l'on était des valeurs que devaient prendre dans ce cas particulier les lettres qui se trouvaient dans ces deux expressions, on a choisi les membres qui ne convenaient pas, pour y faire passer respectivement les termes connus et les termes inconnus. En reprenant le calcul et les faisant changer

de membre d'une manière inverse, les signes de tous les termes seront changés ; les soustractions seront donc possibles et donneront pour reste l'excès qu'on trouvait affecté du signe —. On trouvera donc

$$x = \frac{M}{N}$$

au lieu de

$$x = \frac{-M}{-N};$$

d'où l'on tire cette conséquence que, lorsque la formule générale de l'inconnue donnera pour ses deux termes des nombres affectés du signe —, il faudra tout simplement supprimer ces deux signes, et l'on aura la solution de la question.

Mais il faut bien se garder de dire que c'est d'après la règle des signes démontrée dans la division des polynômes qu'il faut chercher le signe du quotient de deux quantités négatives : ce seraient des mots qui n'auraient aucun sens. On a reconnu dans la division que quand les termes de degré le plus élevé dans le dividende et le diviseur étaient affectés du signe —, ils faisaient connaître un terme ayant le signe + dans le quotient ; et c'eût été improprement qu'on aurait appelé cela diviser deux quantités négatives l'une par l'autre. De même, dans le cas actuel, nous reconnaissons que, quand la formule générale de $x$ conduit à l'indication insignifiante d'une division dont les deux termes sont négatifs, on aura le vrai résultat en divisant simplement ces deux nombres sans aucun signe ; et nous ne disons même pas, comme dans la division, que le quotient doit être affecté du signe + ; car, que voudrait-on dire en mettant le signe + devant un nombre qui n'est ajouté à aucun autre ?

## ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

115. Comme cet Ouvrage n'est pas un traité, et qu'il n'a pour objet que l'étude des méthodes, l'enchaînement des théories et l'esprit des diverses conceptions qui s'y introduisent, nous nous bornerons à la considération des équations à deux inconnues. La complication qui résulterait d'un plus grand nombre d'inconnues n'ajouterait rien aux idées générales que nous nous proposons de présenter ici, et ne pourrait par conséquent que leur faire perdre de leur clarté.

On reconnaît d'abord que, si l'on n'avait qu'une seule équation entre deux inconnues $x$, $y$, le problème serait indéterminé; car si l'on mettait au lieu d'une de ces deux lettres un nombre arbitraire, il resterait à satisfaire à une équation à une seule inconnue, et l'on rentrerait dans la question précédente.

Supposons donc qu'il y ait deux équations entre $x$ et $y$, et prenons d'abord un cas particulier, par exemple celui des deux équations

$$(1) \qquad 4x + 5y = 34,$$

$$(2) \qquad 2x - 3y = 6.$$

La question est de trouver deux nombres qui, mis respectivement dans ces deux équations à la place de $x$ et $y$, rendent les premiers membres égaux aux seconds.

Si l'on pouvait déduire des équations (1) et (2) une équation où il n'y aurait que l'une des deux inconnues, sa détermination serait facile, puisqu'elle serait ramenée à la question précédente. Or on y parviendra en observant que, si l'on connaissait la valeur de $x$ et qu'on la substituât dans les équations (1) et (2), elles devraient être satisfaites par la

valeur cherchée de $y$, et par conséquent, si l'on tirait de l'une des deux la valeur de $y$ et qu'on la remît au lieu de $y$ dans l'autre, cette dernière devrait aussi être satisfaite ; mais, en faisant cette même opération sans connaître $x$, on obtiendra non une équation satisfaite, mais une équation à satisfaire, et qui ne renfermera plus que l'inconnue $x$, ce qui est précisément ce que l'on avait en vue.

Tirant donc, par exemple, la valeur de $y$ de l'équation (2), nous obtiendrons

$$(3) \qquad y = \frac{2x - 6}{3},$$

et, la reportant dans (1), nous aurons

$$(4) \qquad 4x + 5\frac{2x - 6}{3} = 34,$$

et il est facile de voir que le système des deux équations (3), (4), qui se déduit des proposées (1), (2), les entraîne réciproquement. En effet, si (3) est satisfaite par des valeurs de $x$ et $y$, en chassant le dénominateur 3, et changeant les termes de membres, on retombe sur l'équation (2), qui sera par conséquent satisfaite par ces mêmes valeurs : et l'équation (1) sera aussi satisfaite par les nombres qui satisfont à (3) et (4), puisqu'en y mettant d'abord pour $y$ la valeur $\frac{2x - 6}{3}$, qui satisfait à (3), elle devient précisément (4) ; (1) est donc satisfaite par les nombres qui satisfont à (3) et (4).

Et par conséquent il y a réciprocité entre les deux systèmes d'équations (1), (2) et (3), (4).

La question est donc ramenée à la résolution des deux équations (3), (4). La dernière, traitée suivant les règles données pour les équations à une seule inconnue, conduit à

$$x = 6,$$

et par suite (3) donnera

$$y = 2.$$

Ces valeurs étant les solutions uniques du système (3), (4) seront aussi les solutions uniques des équations proposées.

Et comme nos raisonnements sont indépendants des nombres particuliers, et même des signes des termes, nous pouvons établir la règle suivante :

« Pour résoudre deux équations du premier degré à deux inconnues, il faut tirer de l'une la valeur de l'une des inconnues comme si l'autre était connue ; substituer dans l'autre équation cette expression à la place de l'inconnue qu'elle représente ; résoudre l'équation à une seule inconnue qui en résulte, puis reporter la valeur de cette dernière inconnue dans l'expression obtenue pour l'autre, dont on aura ainsi la valeur. »

Cette méthode est applicable à tous les cas particuliers, mais il est utile de renfermer tous ces cas dans des formules générales, et c'est ce que nous allons faire en nous bornant encore au système de deux équations.

# CHAPITRE XV.

## FORMULES GÉNÉRALES POUR LES DIVERS CAS QUE PRÉSENTENT LES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

116. Nous avons donné un moyen d'obtenir des résultats indépendants des valeurs numériques des données des questions d'espèce quelconque. Ce moyen consiste à représenter ces données par des lettres, et à suivre la même marche que pour une question particulière de même espèce. Nous devrons donc dans le cas actuel représenter par des lettres les coefficients des inconnues $x$ et $y$, ainsi que les termes tout connus, et appliquer la règle de résolution que nous venons d'indiquer.

Nous généraliserons ainsi sous le rapport des nombres; mais, comme les équations comportent diverses combinaisons pour les signes des termes, il sera nécessaire d'avoir les formules générales des inconnues $x$ et $y$, pour les divers systèmes d'équations correspondant à ces différentes combinaisons de signes, réduites au plus petit nombre possible.

Nous pouvons toujours faire passer les termes tout connus dans un même membre où les soustractions soient possibles, de sorte qu'il n'y a lieu de considérer que les diverses combinaisons de signes des membres qui renferment $x$ et $y$, et dont encore on pourrait omettre celles où toutes les soustractions sont impossibles dans les premiers membres. Chacun de ces derniers donnerait ainsi trois combinaisons possibles de termes positifs et néga-

tifs, qui pourraient être considérées successivement avec toutes celles de l'autre. Il faudrait considérer ces neuf cas séparément, si l'on voulait distinguer la première équation de la seconde; sans quoi il y en aurait quelques-uns qui rentreraient les uns dans les autres.

Nous allons chercher les formules qui se rapportent à quelques-unes de ces combinaisons de signes.

1° Considérons d'abord le cas le plus simple et le plus facile à retenir, celui où tous les termes sont positifs; et soient les deux équations

$$(1) \qquad ax + by = c,$$

$$(2) \qquad a'x + b'y = c'.$$

En tirant la valeur de $y$ de la première, et la reportant dans la seconde, on obtient

$$a'x + b'\left(\frac{c - ax}{b}\right) = c';$$

et il est facile de voir que le système des équations (1) et (2) est *équivalent* à celui des deux suivantes:

$$(1) \qquad ax + ay = c,$$

$$(3) \qquad a'x + b'\left(\frac{c - ax}{b}\right) = c'.$$

D'abord ce dernier, étant conséquence du premier, sera satisfait par les valeurs de $x$ et $y$ qui satisfont au premier.

En second lieu, supposons que certaines valeurs mises pour $x$ et $y$ satisfassent à (1) et (3); il s'ensuivra d'après (1) que $\frac{c - ax}{b}$ sera égal à la valeur mise pour $y$, et par conséquent (3) apprend que, pour les valeurs substituées, la somme $a'x + b'y$ est égale à $c'$, comme l'exige l'équation (2). Donc le système des valeurs substituées à $x$ et $y$

dans (1) et (3) satisfera aussi aux équations proposées (1) et (2).

Ce raisonnement que nous venons de faire avec beaucoup de détail se représentera souvent, et nous ne le reproduirons que très-succinctement.

Maintenant il est facile de trouver les valeurs de $x$ et $y$ qui satisfont à (1) et (3), puisque cette dernière ne renferme qu'une inconnue.

Elle donnera facilement

$$(4) \qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

et, la reportant dans (1), on trouvera

$$(5) \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Telles sont les formules des valeurs de $x$ et $y$ qui résolvent le système (1) et (2), quelles que soient les valeurs des données $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$. Et nous devons dire qu'on pourrait aussi bien les écrire en changeant le sens des soustractions à leurs numérateurs et dénominateurs, parce qu'on ne sait pas de quel côté faire passer les termes tant que les coefficients restent généraux. Nous avons vu comment il fallait traiter la forme singulière qui pouvait en résulter dans les cas particuliers.

Prenons maintenant la combinaison suivante des signes + et — :

$$(6) \qquad ax - by = c,$$

$$(7) \qquad a'x + b'y = c'.$$

La première équation donnera

$$y = \frac{ax - c}{b};$$

et en la reportant dans la seconde on obtiendra

$$a'x + b'\left(\frac{ax - c}{b}\right) = c'.$$

D'où l'on tirera

$$(8) \qquad x = \frac{cb' + bc'}{ab' + ba'},$$

et, par suite,

$$(9) \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' + ba'}.$$

Ces formules, qui sont différentes de (4) et (5), donnent la solution des équations (6) et (7), quelles que soient les valeurs des données $a$, $b$, $c$, . . . .

117. Considérons encore cette autre combinaison de signes,

$$(10) \qquad ax - by = c,$$

$$(11) \qquad a'x - b'y = c'.$$

Les mêmes calculs conduiront aux formules suivantes :

$$(12) \qquad x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'},$$

$$(13) \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ba' - ab'},$$

qui conviendront aux équations (10), (11), quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres $a$, $b$, $c$.

On trouverait de même les formules qui se rapporteraient aux autres combinaisons de signes ; et leur ensemble donnerait la solution complète des équations du premier degré à deux inconnues.

118. *Remarque.* — Les équations à trois inconnues se ramèneraient au cas de deux inconnues, en tirant de l'une

des trois la valeur d'une inconnue exprimée au moyen des deux autres et la substituant dans les deux autres équations. Par les raisons que nous avons données ci-dessus, nous ne nous en occuperons pas. Mais on doit juger combien se trouverait augmenté le nombre des combinaisons des signes dans les trois premiers membres, et combien il deviendrait difficile de retenir les formules relatives à ces divers systèmes. Et la difficulté serait telle pour un nombre plus grand d'équations, qu'il faudrait renoncer à conserver le tableau de toutes les formules nécessaires à la solution complète, et se borner à les chercher dans le cas particulier dont on aurait besoin.

# CHAPITRE XVI.

## GÉNÉRALISATION DES FORMULES PAR L'INTRODUCTION DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

119. Les procédés identiques que nous avons suivis pour obtenir les formules des inconnues, en partant d'équations différant les unes des autres par le seul changement de signe de certains termes, devaient nous conduire à des expressions composées des mêmes termes, et différant tout au plus par les signes de quelques-uns d'entre eux. C'est en effet ce que montrent les formules (4), (5); (8), (9); (12), (13), et ce que montreraient celles que donneraient les combinaisons que nous n'avons pas considérées.

L'inconvénient d'avoir, pour la solution complète d'une même question, tant de formes diverses qu'il peut être nécessaire de combiner ensuite avec d'autres formules multiples elles-mêmes, et la remarque que ces formes diverses se composaient de termes identiques, affectés seulement de signes qui n'étaient pas tous les mêmes, ont porté à chercher s'il ne serait pas possible de les réunir toutes dans un type unique, d'où l'on ferait sortir, suivant une règle bien déterminée, les formules relatives à toutes les combinaisons possibles des signes dans les équations proposées. Cette formule générale, qui à elle seule renfermerait toutes celles qui correspondent à toutes les variétés que comporte la question, en donnerait la solution la plus parfaite que l'on puisse désirer.

Voyons donc à quel prix on pourrait acheter un pareil avantage.

120. Comparons aux calculs du premier cas ceux qui se rapportent à toutes les autres combinaisons de signes; et pour cela rendons-les aussi semblables que possible, afin que l'analogie qui doit exister entre les formules finales, ainsi que les dissemblances qui doivent s'y trouver, puissent être prévues et démontrées avant même que ces formules soient trouvées.

Commençons par la comparaison du second cas au premier, et assujettissons-nous à faire le calcul absolument de la même manière, à faire passer les termes correspondants dans les mêmes membres, même lorsque les soustractions y seront impossibles; divisons par les coefficients correspondant à ceux par lesquels on a divisé dans le premier cas, même quand ces coefficients seraient précédés du signe —. La discussion que nous avons faite des signes du numérateur et du dénominateur des formules tirées des équations à une seule inconnue ne permettra pas qu'il se trouve la moindre difficulté dans l'interprétation des résultats.

En agissant ainsi, nous rendrons les ressemblances et les dissemblances des deux calculs bien plus faciles à suivre jusqu'à la fin; et la division d'une quantité négative par une quantité négative nous représentera seulement le quotient des deux mêmes nombres sans signes, que l'on aurait eu à considérer si l'on avait fait passer les termes respectivement dans les membres différents.

Soient donc les deux systèmes d'équations

$$(1) \qquad ax + by = c,$$

$$(2) \qquad a'x + b'y = c',$$

et

$$(\alpha) \qquad ax - by = c,$$

$$(\beta) \qquad a'x + b'y = c'.$$

En tirant de la première de chacun des deux la valeur

de $y$, et laissant cette inconnue dans le premier membre, on aura

$$(3) \qquad y = \frac{c - ax}{b},$$

et

$$(\gamma) \qquad y = \frac{c - ax}{-b},$$

en entendant que dans la seconde il faudrait changer le signe de ses termes pour que la division eût un sens.

Substituant dans les équations (2) et ($\delta$) ces expressions qui ne diffèrent que par le changement de $b$ en $-b$, on aura les deux suivantes, qui ne différeront l'une de l'autre que par ce même changement :

$$(4) \qquad a'x + b'\left(\frac{c - ax}{b}\right) = c',$$

et

$$(\delta) \qquad a'x + b'\left(\frac{c - ax}{-b}\right) = c'.$$

Chassons maintenant le dénominateur dans l'une et dans l'autre ; la première deviendra

$$(5) \qquad ba'x + b'(c - ax) = bc'.$$

Quant à l'équation ($\delta$) où l'on devrait changer de signe $c - ax$ et $-b$, si l'on supprime le dénominateur $-b$ et qu'on multiplie les termes $a'x$ et $c'$ par $b$, puis qu'on change leurs signes, on aura une équation qui ne différera de la véritable que parce que tous ses termes seront changés de signe, ce qui ne peut donner de difficulté. Nous devons donc chasser le dénominateur $-b$ en faisant les multiplications par $-b$, d'après la règle des signes démontrée pour les polynômes, et qui n'aurait aucun sens dans le cas actuel. Nous aurons ainsi

$$(\varepsilon) \qquad -ba'x + b'(c - ax) = -bc';$$

et comme (4) et ($\delta$) ne différaient que par le changement de signe de $b$, (5) et ($\varepsilon$) ne différeront aussi qu'en ce que dans (5) il faudrait changer $b$ en $-b$ et exécuter les multiplications suivant les règles des signes dans le cas des polynômes, quoiqu'il n'y ait ici aucun sens à y attacher.

En faisant passer maintenant les termes connus des équations (5) et ($\varepsilon$) dans le même membre, et réunissant les termes en $x$ dans l'autre, la même analogie se maintiendra, et aura encore lieu dans les formules de $x$ tirées dans l'un et l'autre cas ; de sorte que, avant d'achever ce calcul, on est assuré qu'on passera de la formule de $x$ qui convient au système (1), (2), à celle qui convient à ($\alpha$), ($\beta$), en changeant $b$ en $-b$ dans la première, et entendant que les multiplications se feront suivant les règles démontrées pour les quantités négatives non isolées. Et pour l'une et l'autre, les singularités qu'elles pourraient offrir dans des cas particuliers se traiteraient d'après la discussion complète que nous avons faite des équations à une seule inconnue.

Les valeurs ainsi trouvées seront

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad \text{et} \quad x = \frac{cb' + bc'}{ab' + ba'}.$$

Il reste maintenant à comparer les valeurs de $y$.

Or les expressions (3) et ($\gamma$) ne différant que par le changement de signe de $b$, si l'on y remplace $x$ par les valeurs trouvées qui ne diffèrent qu'en cela l'une de l'autre, on trouvera des expressions qui ne différeront aussi que par là l'une de l'autre ; ces expressions seront

$$y = \frac{c - a\dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}}{b} \quad \text{et} \quad y = \frac{c - a\dfrac{cb' + bc'}{ab' + ba'}}{-b}.$$

Si maintenant, dans les numérateurs de ces deux formules, on réduit l'entier au même dénominateur que la fraction,

on passera toujours du premier au second, par le même changement; s'il y a des termes ou des facteurs qui se détruisent d'un côté, les correspondants se détruiront de l'autre; et l'on voit enfin que la valeur de $y$ dans le second système ne différera aussi de celle du premier que par le changement de $b$ en $-b$, sous la condition expresse que les multiplications ou divisions se feront suivant les règles qui n'ont de sens que dans le cas des polynômes.

121. *Remarque.* — Nous aurions bien pu arriver immédiatement à cette conclusion par la comparaison immédiate des formules (4), (5) et (8), (9) du Chapitre XV; mais on n'aurait pas reconnu pourquoi cela devait être nécessairement; et cela n'aurait donné aucune indication relativement aux autres cas.

Au contraire, on voit clairement que si, au lieu de partir de la première combinaison de signes que nous avons choisie, on partait de toute autre, en y comprenant même ceux des seconds membres $c$, $c'$, et qu'on obtînt les formules de $x$ et $y$ qui s'y rapportent; si l'on changeait dans les équations le signe d'un seul terme, les nouveaux calculs à faire ne différeraient successivement des autres que par le changement de signe du coefficient de ce terme, sous la condition expresse d'effectuer les opérations d'après les règles des signes démontrées dans le cas des polynômes, et qui n'ont ici d'autre objet que de donner une indication commode pour conduire aux signes que l'on a démontré que les termes devaient avoir.

Or l'effet produit dans les formules des inconnues par un seul changement de signe dans les termes des inconnues fait connaître de proche en proche l'effet qui serait produit par un nombre quelconque de changements successifs.

Si, par exemple, on veut passer des formules de notre

premier cas à celles que donneraient les équations

$$ax - by = c,$$
$$-a'x + b'y = c',$$

on partira des formules correspondant au simple changement de signe de $b$, et dans celles que l'on obtiendra on fera le changement de signe de $a'$ suivant la loi démontrée. Il en résultera que les termes qui dans les premières formules renfermaient les deux coefficients $b$ et $a'$ auront changé deux fois de signe, et par conséquent reprendront celui qu'ils avaient; ceux qui ne renfermaient qu'un seul des deux auront changé de signe, et ceux qui n'en renfermaient aucun seront restés tels qu'ils étaient, c'est-à-dire que l'on n'aurait qu'à faire la substitution de $-b$ et $-a'$ à $b$ et $a'$ dans les premières formules des inconnues, en effectuant toujours les multiplications suivant les mêmes règles.

122. *Conclusion.* — Nous venons donc de découvrir un moyen de donner aux formules qui résolvent les équations du premier degré à deux inconnues le plus grand degré possible de généralité. Une seule formule pour chacune de ces inconnues s'appliquera non-seulement à toutes les valeurs numériques des coefficients, mais encore à toutes les combinaisons de signes des termes des équations.

Ce moyen consiste à choisir une certaine combinaison de signes pour servir de type, et à déterminer les formules qui s'y rapportent. Il est naturel de choisir celle qui est la plus simple et, par suite, la plus facile à retenir, celle où tous les termes ont le même signe. Pour appliquer cette formule à un cas particulier quelconque, où les termes auront des coefficients et des signes quelconques, il suffira d'y remplacer les lettres par ces coefficients affectés des signes de ces termes, et de traiter ces

quantités négatives d'après les règles démontrées dans les opérations sur les polynômes. Le résultat numérique sera précisément celui qu'on aurait trouvé en traitant directement ce cas particulier.

123. *Observation.* — Nous ne saurions trop rappeler que dans ce qui précède nous n'avons attaché aucun sens aux opérations sur les quantités négatives. Nous ne nous sommes servi des locutions empruntées aux opérations sur les polynômes que pour indiquer d'une manière rapide et commode le moyen de tirer de la formule type tous les cas particuliers possibles. Nous disons que si l'on a un terme $ab'$ dans cette formule, et que dans un cas particulier le coefficient $a$ soit 5 et le signe du terme $-$; que de plus le coefficient $b'$ ait la valeur 4 et le terme le signe $+$, il faut remplacer $ab'$ par $-20$, comme si l'on avait multiplié les termes $-5$ et $+4$ dans deux facteurs polynômes. Et, si $b'$ était dans un autre cas $-4$, on ferait le produit de $-5$ par $-4$ d'après ces mêmes règles, et l'on remplacerait $ab'$ par $+20$.

Il faut bien se garder de prendre le langage dans un autre sens, et de voir, dans ce moyen commode de renfermer toutes les formules dans une seule, de véritables opérations effectuées sur des quantités négatives isolées; opérations dont on a souvent démontré les règles, soit en les rattachant vicieusement à celles des polynômes, soit en cherchant à donner une existence à ces êtres fantastiques, et raisonnant comme si cette représentation arbitraire s'appliquait à tout.

# CHAPITRE XVII.

## AUTRES EXEMPLES DE GÉNÉRALISATION PAR LES QUANTITÉS NÉGATIVES.

### CONDITIONS DE DIVISIBILITÉ DE DEUX POLYNÔMES.

**124.** Deux polynômes ordonnés par rapport à une même lettre sont quelquefois exactement divisibles l'un par l'autre, mais le plus souvent la division donnera un reste ; on peut donc se demander quelles sont les conditions nécessaires entre les coefficients généraux de ces polynômes pour que l'opération conduise à un reste dans lequel les termes qui sont réductibles ensemble s'entre-détruisent.

Il ne s'agit donc que de trouver les équations qui expriment ces conditions, et il suffit pour cela de suivre la marche indiquée précédemment, et qui est celle de la vérification. Or, pour vérifier si le reste est nul, il faut faire la division jusqu'à ce qu'on parvienne au dernier reste possible et voir si la réduction des coefficients des termes de même degré donne zéro pour résultat. On aura donc les conditions nécessaires et suffisantes en égalant à zéro l'ensemble des coefficients pour chacun des degrés de la lettre principale dans le reste.

Mais ces équations de condition dépendront des signes que l'on aura supposés aux différents termes des polynômes donnés ; et il est naturel de chercher s'il est possible de renfermer dans un seul tous les systèmes de conditions relatifs à la multitude des combinaisons diverses de ces signes.

La nature des raisonnements à faire pour y parvenir étant indépendante du degré de ces polynômes, nous nous bornerons à considérer le cas où l'un serait du quatrième et l'autre du second.

Soient donc les deux polynômes

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad \text{et} \quad x^2 + ax + b.$$

La division conduit à un reste du premier degré, après lequel l'opération ne doit plus être continuée ; en égalant à zéro le coefficient du terme en $x$, ainsi que l'ensemble des termes indépendants de $x$, on obtient les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} A(b - a^2) + Ba - C + a^3 - 2ab = 0, \\ Aab - Bb + D + b^2 - a^2 b = 0. \end{cases}$$

Telles sont les conditions qui doivent exister entre les coefficients des deux polynômes pour que le premier soit divisible par le second : elles se rapportent au cas où tous les termes sont positifs. Voyons ce qui arriverait si l'un d'eux était négatif, par exemple le terme $ax$.

Toutes les opérations s'exécutant d'après les règles des signes démontrées pour la multiplication et la division des polynômes, il est évident que les calculs correspondant à ce nouveau cas ne différeront des premiers que par le signe des termes qui renfermeront un nombre impair de facteurs $a$ ; et, par conséquent, les deux équations de condition qu'on trouvera ne différeront des équations (1) que par ce changement ; on peut donc dire que ces dernières deviendraient celles qui conviennent au nouveau cas en changeant $a$ en $-a$ et effectuant les multiplications sur cette quantité négative, d'après les règles des signes démontrées pour les polynômes.

Si maintenant on supposait plusieurs termes négatifs dans les deux polynômes, on reconnaît de même que les

calculs ne différeraient des premiers que par les changements de signe des termes où il y aurait un nombre impair de coefficients des termes qui ont changé de signe ; et la conclusion générale s'énoncera ainsi, et sera applicable à tous les degrés :

« Si l'on a trouvé les conditions de divisibilité de deux polynômes généraux de degrés quelconques, en supposant tous leurs termes positifs, on aura celles qui se rapporteront à une combinaison quelconque de signes, en supposant négatifs les coefficients des termes qui ont changé de signes, et effectuant les opérations sur ces quantités négatives d'après les règles démontrées pour les polynômes. »

125. On voit donc encore que les quantités négatives sont introduites ici dans le but de renfermer tous les systèmes de conditions dans un seul ; que le moyen d'y parvenir consiste à regarder comme négatifs les coefficients des termes qui ont un signe contraire à celui qu'ils avaient dans les données du premier calcul ; mais que l'on n'attache aucun sens à une quantité négative isolée, et qu'il n'y a aucune règle à démontrer pour effectuer sur elle aucune opération réelle.

Dans ce cas encore nous avons choisi pour les données la combinaison de signes la plus simple, et par suite la plus facile à retenir ; mais on aurait pu partir de toute autre, et les équations de condition auxquelles on serait parvenu auraient donné celles relatives à toute autre combinaison, en y changeant le signe des coefficients des termes, non pas négatifs, mais de signes différents de ceux des termes correspondants dans les polynômes qu'on aurait choisis.

Pour en donner un exemple, nous prendrons une question dont l'application est très-fréquente :

*Trouver les conditions pour qu'un polynôme de degré m soit divisible par un binôme du premier.*

Nous donnerons le signe + à tous les termes du polynôme, mais nous donnerons le signe — au second terme du binôme, et nous chercherons les conditions pour que la division de

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$$

par $x - a$ réussisse exactement.

Or, en effectuant la division par le procédé élémentaire que nous supposons connu, et en la poussant jusqu'au reste indépendant de $x$, on reconnaît facilement que ce reste est

$$Aa^m + A_1a^{m-1} + \ldots + A_{m-1}a + A_m,$$

c'est-à-dire que pour l'obtenir il suffit de changer $x$ en $a$ dans le polynôme proposé, dans lequel il est évident, par les raisons données ci-dessus, que les coefficients $A, A_1, \ldots$ peuvent être supposés négatifs ; d'où l'on conclut qu'il est nécessaire et suffisant que cette substitution donne zéro pour résultat, pour que la division du polynôme par $x - a$ réussisse. Les conditions demandées sont donc exprimées par l'équation unique

$$(1) \qquad Aa^m + A_1a^{m-1} + \ldots + A_{m-1}a + A_m = 0.$$

Voyons maintenant quelle serait la condition pour que ce polynôme fût divisible par $x + a$.

Or, en faisant la division par $x + a$, les opérations successives seront les mêmes ; mais, toutes les fois que dans le premier calcul on multipliera par le terme $-a$, on aura dans le second à multiplier par le terme $+a$ ; donc, quand il y aura un nombre pair de facteurs, les produits seront de même signe ; ils seront de signes contraires quand il y en aura un nombre impair, et cette dissemblance se conservera dans les résultats des soustractions opérées dans les deux calculs. D'où il suit que les deux restes ne différeront

que par le signe des termes affectés de puissances impaires de $a$.

On peut donc dire que l'équation (1) exprime la condition générale pour que le polynôme soit divisible par le binôme $x - a$, en entendant que $a$ peut être implicitement négatif, pourvu qu'alors on le traite par les règles sur les quantités non isolées.

126. *Corollaire I.* — Si l'on savait qu'un polynôme

$$(1) \qquad Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$$

se réduit à zéro quand on y substitue successivement $m$ nombres positifs ou négatifs $a$, $b$, $c$, ..., différents les uns des autres, on pourrait affirmer qu'il est le produit de la multiplication de son premier coefficient A par $m$ facteurs binômes ayant pour premier terme $x$ et pour second terme chacun des nombres positifs ou négatifs qui le rendent nul, changés respectivement de signes.

En effet, nous venons de voir que si le polynôme est rendu nul par la substitution de $a$ à $x$, quel que soit le signe implicite de $a$, la division par $x - a$ réussira, et il est clair que le premier terme du quotient sera $Ax^{m-1}$. Ce diviseur $x - a$ serait $x - 5$ si $a$ est 5, par exemple, et il serait $x + 5$ si $a$ était $-5$. On peut donc dire que le polynôme n'est autre chose que le produit

$$(x - a)(Ax^{m-1} + \ldots);$$

ce produit doit donc devenir zéro quand on y substitue $b$ à $x$.

Or le premier facteur devient $b - a$, et si le second ne devenait pas nul par cette substitution, le produit ne le serait pas, ce qui serait contre l'hypothèse; donc le facteur $Ax^{m-1} + \ldots$ est rendu nul par la substitution de $b$, positif ou négatif; donc il est le produit de $x - b$ par un

polynôme dont le premier terme est $Ax^{m-2}$. On continuerait ainsi jusqu'à $x - l$, et le polynôme proposé n'est, par conséquent, autre chose que le produit

$$(2) \qquad A(x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

que l'on effectuerait suivant les règles ordinaires.

127. *Remarque.* — Il n'est pas possible que le polynôme (1) soit annulé par plus de $m$ substitutions différentes, car il faudrait que le produit (2) devînt nul quand aucun des facteurs $x - a, \ldots, x - l$ ne le deviendrait; ce qui est impossible si le facteur invariable A ne l'est pas lui-même. Si donc on avait démontré que (1) et par suite (2) deviennent réellement nuls par plus de $m$ substitutions différentes, il en résulterait comme conséquence nécessaire que A serait nul, et par conséquent que (2) et par suite (1) seraient nuls, quelque valeur que l'on donnât à $x$.

Il résulte évidemment de là qu'il ne peut y avoir deux manières de décomposer un polynôme en facteurs du premier degré.

On remarquera de plus qu'en effectuant les multiplications indiquées dans l'expression (2), les coefficients des différentes puissances de $x$ auront A comme facteur et deviendront tous nuls, si A est nul. Et comme ces coefficients sont précisément ceux de (1) qui est le produit même, tous ces coefficients $A, A_1, A_2, \ldots, A_m$ devront être nuls si le polynôme (1) est rendu nul, par la substitution de plus de $m$ nombres différents, positifs ou négatifs.

*Corollaire II.* — Si deux polynômes de degré $m$ donnent des résultats égaux, positifs ou négatifs, quand on y substitue plus de $m$ nombres différents, positifs ou négatifs, tous les coefficients des mêmes puissances sont respectivement égaux, et le second polynôme n'est que la répé-

tition du premier. Car, en les retranchant l'un de l'autre, on aura un polynôme de degré $m$ qui devra se réduire à zéro par la substitution de plus de $m$ nombres positifs ou négatifs. Tous ces coefficients seront donc nuls, et par suite ceux des deux polynômes seront égaux.

128. *Extension du dernier théorème au cas de plusieurs variables.* — Il est utile d'étendre le dernier théorème aux polynômes qui renferment plusieurs variables indépendantes. Nous nous bornerons au cas de deux variables ; la marche se trouvera assez indiquée pour un plus grand nombre. Voici l'énoncé du théorème que nous allons démontrer :

« Étant donnés deux polynômes entiers renfermant les variables $x$ et $y$ dans leurs différents termes, de manière que $x$ n'entre pas à un degré plus élevé que $m$, ni $y$ à un degré plus élevé que $n$ ; si ces deux polynômes prennent des valeurs égales lorsque l'on substitue successivement à $x$ plus de $m$ valeurs différentes quelconques, et que, conjointement avec chacune d'elles, on substitue plus de $n$ valeurs différentes de $y$, on peut affirmer que ces deux polynômes sont composés identiquement des mêmes termes en $x$ et $y$. »

Soient les deux polynômes

$$\begin{aligned} &A y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_n, \\ &a y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_n, \end{aligned}$$

les coefficients $A, A_1, \ldots, a, a_1, \ldots$ renfermant $x$ à un degré tout au plus égal à $m$.

Substituant à $x$ la première des $m+1$ valeurs données, les deux polynômes seront rendus égaux par hypothèse, par la substitution successive de $n+1$ valeurs différentes de $y$ ; donc les coefficients des mêmes puissances de $y$ seront égaux, et, par conséquent, la première des $m+1$

valeurs données de $x$ satisfait aux égalités

$$A = a, \quad A_1 = a_1, \quad \ldots, \quad A_n = a_n.$$

Le même raisonnement prouvera que ces équations en $x$ seront satisfaites par chacune des $m+1$ valeurs différentes de $x$; et comme chacun des polynômes $A, A_1, \ldots, a, a_1, \ldots$ renferme $x$ à un degré inférieur à $m+1$, ils seront respectivement égaux terme pour terme. Les deux polynômes proposés seront donc composés identiquement des mêmes termes en $x, y$; ce qu'il fallait démontrer.

**129.** Nous ferons remarquer un cas particulier renfermé dans ce qui vient d'être démontré et que nous rencontrerons plus tard : c'est celui où les deux polynômes en $x$ et $y$ auraient des valeurs égales, pour toutes les valeurs entières de $x$ et $y$, supérieures à des limites désignées quelconques. Les raisonnements précédents démontrent que ces conditions entraînent l'identité des deux polynômes terme pour terme.

*Corollaire III.* — On conclut du corollaire premier qu'une équation de degré $m$ ne peut admettre comme racines plus de $m$ nombres différents, positifs ou négatifs; ou bien que toute valeur y satisfait.

## DES EXPOSANTS NÉGATIFS.

**130.** La division d'une puissance d'une quantité quelconque $a$ par une puissance de degré moindre de la même quantité s'effectue par la soustraction des exposants. Ainsi $\frac{a^7}{a^4}$ est égal à $a^{7-4}$ ou $a^3$.

Cette règle est générale et s'appliquerait à des exposants quelconques $m$ et $n$, de sorte que l'on peut toujours

simplifier l'expression du quotient $\frac{a^m}{a^n}$ en le remplaçant par $a^{m-n}$, à la condition seulement que l'on aura $m > n$.

Mais si l'on ignore si cette dernière condition est remplie, on se trouve entre deux inconvénients : ou de ne pas simplifier l'expression, ou de s'exposer à avoir un exposant négatif dans les cas où l'on aura $m < n$. Ce dernier inconvénient serait sans gravité si cet exposant n'avait été soumis à aucune opération, parce que, connaissant son origine, on n'aurait qu'à remplacer $a^{m-n}$ par $\frac{1}{a^{n-m}}$ qui serait la véritable indication simplifiée du quotient ; mais, si l'exposant négatif a été soumis à des opérations, il aura été traité d'après les règles relatives aux exposants positifs, et il s'agit de savoir si les résultats auxquels on sera parvenu seront exacts, ce qui est incertain avant un examen sérieux, même en remplaçant les exposants négatifs par des exposants positifs aux dénominateurs.

Supposons donc des exposants négatifs provenant d'une soustraction effectuée en vue de la division de deux puissances d'une même quantité $a$. L'expression $a^{-m}$ signifiera par conséquent que l'exposant du diviseur surpassait de $m$ celui du dividende, et le quotient était $\frac{1}{a^m}$.

En entendant ainsi les exposants négatifs, voyons quelles règles il faut suivre pour obtenir des résultats exacts dans les diverses opérations auxquelles ils peuvent être soumis.

131. *Multiplication.* — Soit à multiplier $a^{-m}$ par $a^{-n}$, ou, d'après leur signification, $\frac{1}{a^m}$ par $\frac{1}{a^n}$. Ce produit est $\frac{1}{a^{m+n}}$, qui, écrit avec la notation des exposants négatifs, deviendra $a^{-m-n}$. Donc, pour avoir la représentation du véritable produit par un exposant négatif, il faut réunir les exposants $-m$ et $-n$ en leur conservant leurs signes.

Soit maintenant à multiplier $a^{-m}$ par $a^n$, c'est-à-dire $\frac{1}{a^m}$ par $a^n$, on aura $a^{n-m}$ si $n$ est plus grand que $m$; sinon ce sera $\frac{1}{a^{m-n}}$, qui s'écrirait encore $a^{n-m}$ dans la notation des exposants négatifs; on voit donc encore dans ce cas qu'il faut réunir les exposants avec leurs signes, et qu'on aura ainsi le produit cherché ou au moins sa représentation en exposant négatif.

Si donc on appelle *addition* la réunion de quantités, en conservant leurs signes comme dans le cas des polynômes, on pourra dire que la multiplication des quantités affectées d'exposants positifs ou négatifs s'effectue par l'addition des exposants; et que le résultat ainsi obtenu sera le vrai produit, ou au moins sa représentation dans le système de notation des exposants négatifs.

132. *Division.* — Si l'on a à diviser $a^{-m}$ par $a^{-n}$, c'est-à-dire $\frac{1}{a^m}$ par $\frac{1}{a^n}$, on trouvera $a^{n-m}$ si $n$ est plus grand que $m$, et $\frac{1}{a^{m-n}}$ si l'on a $m > n$. On aura donc le quotient véritable, ou au moins sa représentation, en réunissant $-m$ avec $n$, c'est-à-dire avec l'exposant du diviseur changé de signe. Et si l'on appelle cela soustraire $-n$, on pourra dire que le quotient est représenté en exposant positif ou négatif, en retranchant l'exposant du diviseur de celui du dividende.

Les autres cas de la division donneraient des résultats analogues.

133. *Élévation aux puissances.* — Soit $a^{-m}$ à élever à la puissance $n$. En remplaçant $a^{-m}$ par $\frac{1}{a^m}$ qu'il représente, on trouvera $\frac{1}{a^{mn}}$ pour la puissance $n^{\text{ième}}$; et sa représentation

en exposant négatif sera $a^{-mn}$. Or c'est ce qu'on obtiendrait en multipliant l'exposant $-m$ par $n$ d'après les règles des polynômes. On peut donc encore dire que l'élévation à la puissance se fait d'après les mêmes règles pour les exposants positifs ou négatifs, en entendant toujours de la même manière les opérations sur les quantités négatives isolées.

Enfin, si l'on voulait élever $a^{-m}$ à la puissance $-n$ en entendant que cette puissance $-n$ signifie l'unité divisée par la puissance positive, il faudrait d'abord remplacer $a^{-m}$ par $\frac{1}{a^m}$ et diviser l'unité par la puissance $n$ de $\frac{1}{a^m}$, ou par $\frac{1}{a^{mn}}$, ce qui donnerait $a^{mn}$. Or c'est précisément ce qu'on obtiendrait en multipliant $-m$ par $-n$ suivant la règle ordinaire des signes.

Donc enfin on élève une puissance quelconque positive ou négative de $a$ à une puissance positive ou négative, par la multiplication des exposants suivant les règles des signes établies pour les polynômes.

134. On voit donc que l'on pourra effectuer la division des puissances d'une même lettre, par la soustraction des exposants, sans s'inquiéter de savoir lequel est le plus grand. S'il s'introduit de cette manière des exposants négatifs, il n'en résultera aucune erreur en les traitant d'après les mêmes règles que les exposants ordinaires, et en entendant que les opérations sur les quantités négatives isolées soient effectuées d'après les règles des signes des polynômes, et sans y attacher aucun sens. Il ne faut y voir qu'un moyen de généralisation démontré exact sous ces conditions.

## CHAPITRE XVIII.

### DES QUANTITÉS NÉGATIVES SE PRÉSENTANT COMME SOLUTIONS.

135. Toute chose ne peut se présenter que dans les données, ou dans les résultats, c'est-à-dire dans les conséquences des données. Si elle entre dans les données, on sait comment on l'y a introduite ; si elle en est une conséquence, c'est le raisonnement qui l'a produite ; il n'en peut donc résulter aucune difficulté, si l'on s'est bien rendu compte de ce que l'on a fait.

Malheureusement on traite souvent les questions avec trop de légèreté, et l'on ne s'assure pas assez que celles auxquelles on les ramène satisfont à la condition de réciprocité sur laquelle nous avons tant insisté. Il en résulte que ces nouvelles questions peuvent présenter des solutions étrangères, ou même des impossibilités, qui ne sont pas dans la proposée. Leur apparition étonne parce qu'on ne l'a pas prévue, et on cherche à l'expliquer en revenant sur ses pas ; mais souvent on se laisse séduire par des apparences de raisons, par suite de la confiance aveugle que l'on finit par prendre dans le calcul, qui n'est cependant que l'expression des raisonnements que l'on a dû faire. Les plus grands géomètres n'ont pas été exempts de ce préjugé qui fait regarder l'*analyse algébrique* comme une sorte d'oracle qui ne fait pas toujours des réponses intelligibles, mais dont les énigmes doivent toujours renfermer un sens dont il faut s'étudier à pénétrer le mystère.

La vérité est que l'analyse ou la synthèse que l'on a

employée, ayant procédé par des déductions ou réductions que l'on a dû comprendre à mesure qu'on les a faites, soit qu'on les ait écrites en langage ordinaire, ou avec les formes qu'on appelle ordinairement *algébriques,* c'est-à-dire avec la notation dont on est convenu pour généraliser, il n'a dû s'introduire rien de mystérieux. Les formes bizarres auxquelles le raisonnement arrive quelquefois à la fin ont été créées par lui sans qu'il s'en doutât, et il se croit obligé d'expliquer leur existence, qu'il admet comme incontestable, et dont il veut se rendre compte *a priori*. Ces aberrations ne sont pas rares, et les quantités négatives et imaginaires en offrent de nombreux exemples.

Nous pensons qu'un esprit simple, mais rigoureux, qui n'avancera jamais qu'en se rendant bien compte de la déduction ou de la réduction par laquelle il passe, n'éprouvera aucune de ces surprises qui causent quelquefois tant de tourment. Il pourra marcher plus lentement, s'arrêter même quand un plus aventureux passera outre ; mais il échappera à toutes les obscurités dont l'autre se trouvera longtemps peut-être embarrassé.

Ce n'est pas toutefois que nous repoussions une hardiesse allant même quelquefois jusqu'à la témérité : on ne découvre pas toujours sans s'exposer à l'erreur; mais on doit savoir qu'on s'y expose, et prendre toutes les précautions, faire toutes les réserves, pour bien assurer ce que l'on aura trouvé en se relâchant de la sévérité des méthodes.

### VALEURS NÉGATIVES DES INCONNUES TIRÉES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

136. Nous avons expliqué comment la résolution de plusieurs équations du premier degré, renfermant un nombre égal d'inconnues, se ramenait définitivement à

une équation du premier degré à une seule inconnue. Cette dernière se met facilement sous la forme

$$(1) \qquad Ax = B,$$

et si les soustractions sont possibles dans A et B, ou, ce qui revient au même par la transposition des membres, si elles sont impossibles dans les deux, cette équation est satisfaite par la valeur unique

$$(2) \qquad x = \frac{B}{A},$$

et il n'y a lieu à aucune difficulté.

Mais si les soustractions sont possibles dans l'une des expressions A, B et impossibles dans l'autre, aucun nombre ne peut satisfaire à l'équation, comme nous l'avons déjà dit précédemment.

Seulement on doit noter avec soin ce fait, que les valeurs trouvées sous cette forme satisferont aux équations qui y ont conduit, si l'on effectue sur elles toutes les opérations suivant les règles des signes démontrées dans le cas des polynômes.

En effet, si l'on remplace $x$ par $\frac{B}{A}$ dans l'équation (2), on a l'identité

$$\frac{B}{A} = \frac{B}{A}.$$

Si l'on multiplie les deux membres par A positif ou négatif, comme s'ils représentaient quelque chose, on aura

$$B = B,$$

c'est-à-dire que l'équation (1) sera identique en remplaçant $x$ par $\frac{B}{A}$.

De même, en remontant aux équations précédentes en $x$, on verra qu'elles sont satisfaites par cette substitution, en

effectuant toujours les opérations de la manière entendue. En continuant à remonter aux équations qui ont donné les valeurs des autres inconnues $y$, $z$, ..., au moyen de $x$ ou de $y$ et $x$, et ainsi de suite, on reconnaîtra que les deux membres de chacune sont rendus identiques par les substitutions des valeurs positives ou négatives obtenues pour toutes les inconnues qui y entrent. D'où il résultera enfin que le système des équations proposées deviendra de même une suite d'identités par ces substitutions ainsi entendues.

Cette constatation n'offrant aucune des difficultés que nous voulons prévenir, nous n'y insistons pas avec autant de détail qu'on le fera dans un enseignement classique. Il nous suffit d'avoir nettement indiqué le sens dans lequel notre proposition doit être entendue, et la marche qui en donnera sans peine la démonstration.

### D'OU PROVIENNENT LES SOLUTIONS NÉGATIVES DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

137. Si les conditions d'un problème sont incompatibles entre elles, et qu'on ne s'en aperçoive pas en le mettant en équation, il peut arriver que la résolution de cette équation conduise à des soustractions impossibles. Si l'on s'est assuré que les équations sont bien des conséquences des conditions données, il n'y a pas autre chose à conclure que l'impossibilité de la question ; et quant au fait que la valeur négative satisfait, comme nous l'avons dit, à l'équation, il ne peut modifier en rien cette conclusion, puisqu'il est le résultat d'opérations qui n'ont pas de sens par elles-mêmes.

Mais si les conditions laissent certaines circonstances douteuses, et que pour mettre en équation on ait choisi celles qui ne conviennent pas, l'impossibilité trouvée peut

annoncer seulement qu'on a mal choisi. On devra alors essayer si la question peut être résolue en prenant les conditions de l'autre manière ; et si elle ne l'était pas encore, la question proposée serait absolument impossible.

138. Quand on a fait le calcul pour la résolution de la question, d'après celle des hypothèses que l'on a choisie au hasard, il peut arriver qu'on n'ait pas besoin de le recommencer dans la seconde, et que le résultat du premier calcul permette de déterminer immédiatement celui du second.

Par exemple, si dans l'énoncé des conditions on laisse incertain si une quantité inconnue doit être ajoutée ou retranchée d'une certaine autre, et qu'on ait choisi l'hypothèse de l'addition, il est facile de reconnaître que, si dans les deux cas on a les mêmes opérations à faire, les résultats ne différeront de part et d'autre que par le changement de signe des termes qui renfermeront l'inconnue. D'où il suit que, si l'une des hypothèses conduit à une équation dont les deux membres soient de signes contraires, l'autre conduira à une équation qui ne différera de la première qu'en ce que ces deux membres auront les mêmes signes.

On voit donc que quand on se sera assuré, dès le commencement, de la similitude des opérations, il suffira toujours de faire le calcul dans une seule hypothèse. Car si l'on a choisi la vraie, on obtient la solution de la question proposée, et il n'y en a pas d'autre à chercher ; et si l'on a choisi la fausse, on en sera averti par la solution négative ; et cette dernière sera tout aussi utile que l'autre, puisqu'on sait qu'elle lui devient identique en supprimant le signe —.

139. Le cas que nous venons de supposer se présente très-souvent, et ne peut offrir aucune difficulté à celui qui

s'est rendu compte, dès le commencement, de l'ambiguïté des conditions, qui n'est pas toujours explicitement indiquée. Quant à celui qui a mal étudié ces conditions, l'avertissement qu'il reçoit à la fin le portera à remonter à l'origine, et la difficulté disparaîtra.

140. Pour en donner un exemple bien simple, supposons qu'on demande à quelle époque les âges de deux personnes, qui sont aujourd'hui $a$ et $b$, sont dans le rapport de $m$ à $n$.

Il y a ici deux hypothèses à faire : ou que cette époque soit dans l'avenir, ou qu'elle soit dans le passé. Dans la première, si l'on désigne par $x$ la distance de l'époque au moment présent, les deux âges seront devenus $a+x$ et $b+x$; dans la seconde, ils seront exprimés par $a-x$ et $b-x$. La condition qu'ils doivent remplir s'exprimera donc dans le premier cas par

$$(1) \qquad \frac{a+x}{b+x} = \frac{m}{n},$$

et dans le second par

$$(2) \qquad \frac{a-x}{b-x} = \frac{m}{n}.$$

Ces deux équations ne différant que par le signe des termes en $x$, si l'une est satisfaite par un nombre substitué à $x$, l'autre ne le sera pas ; et si l'une est satisfaite par — un nombre, l'autre le sera par ce nombre même. Il suffit donc de faire le calcul pour une seule, par exemple pour l'équation (1). Si elle donne pour $x$ un nombre absolu, cela apprendra que l'époque cherchée est dans l'avenir, et l'on connaîtra sa distance au moment présent. Si, au contraire, on trouve pour $x$ — un nombre, cela apprendra que l'époque cherchée est dans le passé, et la valeur absolue du nombre négatif trouvé sera la distance de cette époque au

moment présent. La valeur de $x$ tirée de (1) sera

$$x = \frac{an - mb}{m - n}.$$

Si les deux termes de cette fraction sont de mêmes signes, l'époque sera dans l'avenir. S'ils sont de signes contraires, elle sera dans le passé.

Appliquons ce calcul au cas où les deux âges seraient 5 et 7, et le rapport demandé celui de 9 à 13.

La formule donnera, dans ce cas,

$$x = \frac{65 - 63}{9 - 13} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

Ce résultat apprend donc que l'époque est antérieure de $\frac{1}{2}$ à l'époque actuelle.

Et, en effet,

$$\frac{5 - \frac{1}{2}}{7 - \frac{1}{2}} = \frac{9}{13},$$

comme cela devait être.

**141.** On doit conclure de ce qui précède que c'est par l'étude approfondie des conditions de la question qu'il faut tâcher de prévoir les différentes circonstances que les solutions pourront offrir, et alors toute difficulté est impossible. Si l'on n'a pu y réussir complétement, le résultat imprévu auquel on arrivera obligera à faire après ce qu'il aurait mieux valu faire avant.

Le point que nous traitons ici étant de la plus haute importance, et devant se généraliser beaucoup par la suite, nous allons résoudre, avec tous les développements qu'elle comporte, une question que l'on traite avec soin dans tous

les cours élémentaires, et dont on se sert pour l'explication des solutions négatives des problèmes.

### PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA RENCONTRE DE DEUX MOBILES.

142. Lorsqu'un point se meut uniformément sur une ligne indéfinie, et depuis un temps indéfini, on pourra déterminer sa position à une époque quelconque dans le passé ou l'avenir, si l'on connaît sa position à une époque connue, le sens dans lequel il se meut, et sa vitesse, c'est-à-dire l'espace constant qu'il parcourt dans une unité de temps.

Si l'on a des données analogues pour un second mobile, son mouvement sera de même entièrement déterminé. Le point de leur rencontre le sera donc aussi, ainsi que toutes les circonstances de leur mouvement relatif.

Mais la solution d'une quelconque des questions qu'on peut se proposer à ce sujet, par exemple celle de la rencontre des mobiles, est susceptible d'un grand nombre de cas différents, donnant lieu à des calculs analogues, mais non identiques.

Ces divers cas seront déterminés par la position des deux mobiles à l'époque donnée, par le sens de leurs mouvements, qui peut être le même ou contraire, enfin par la grandeur de leurs vitesses respectives. L'époque de leur rencontre peut être dans le passé ou dans l'avenir, et la position de ce point peut être située de différentes manières par rapport aux positions primitives données.

Sans faire le dénombrement complet de toutes les combinaisons des données, qui conduisent à des calculs différents, on juge facilement de la peine qu'il faudrait prendre pour avoir les solutions de tous ces cas divers, qui par leur réunion formeraient la solution complète du problème proposé.

On comprend ainsi combien il serait important de réunir en une seule formule toutes celles qui sont nécessaires pour la détermination du mouvement d'un seul mobile, dans les divers cas possibles. Car le mouvement de chacun d'eux étant déterminé par une seule formule, on n'aurait plus qu'un seul calcul à faire, et le résultat qu'il donnerait renfermerait les solutions de tous les cas que l'on était obligé de traiter séparément.

L'avantage que nous procurerait cette généralisation doit nous porter à chercher les moyens d'y parvenir; et c'est ce que nous allons faire avec tous les développements que demande une si importante question.

### ÉQUATION DU MOUVEMENT UNIFORME D'UN POINT.

143. Soit A la position d'un mobile à une époque connue, à partir de laquelle nous compterons le temps (*fig.* 1).

Fig. 1.

Supposons que le mobile se meuve dans le sens AX avec une vitesse $v$; désignons par $x$ la distance AM du mobile à un point fixe O, pris sur la droite qu'il parcourt; par $t$ le temps écoulé depuis le moment où il était en A jusqu'à celui où il est en X; et par $a$ la distance OA. Il est clair que $x$ change avec $t$, et il s'agit de trouver la relation qui les lie l'un à l'autre.

Or, $v$ désignant l'espace parcouru pendant l'unité de temps, l'espace AM parcouru dans le temps quelconque $t$ sera $vt$, et l'on aura, par conséquent,

$$x = a + vt. \tag{1}$$

Cette formule fera connaître l'une quelconque des deux

variables $x$ et $t$ quand l'autre sera donnée, mais seulement pour les époques qui suivront celle où le mobile était en A.

Considérons maintenant les époques antérieures à cette dernière : le mobile ne sera pas encore arrivé en A, ce que nous exprimerons en disant qu'il était à gauche de A, en regardant AX comme la droite. Mais, d'après la position que nous avons supposée à l'origine O des $x$, le mobile pourra être en M′ entre A et O, ou en M″ à gauche de O.

Dans le premier cas, si l'on désigne par $t'$ le temps qui sépare l'époque que nous considérons de celle que nous avons prise pour origine des temps, nous aurons évidemment

$$x = a - vt'. \tag{2}$$

Dans le second cas, le mobile est en M″, et l'on aura

$$\mathrm{OM}'' = vt' - a. \tag{3}$$

Ainsi les données étant que la position initiale A du mobile est à droite de l'origine O et que le mouvement a lieu vers la droite, il faut trois formules différentes pour représenter les positions du mobile, dans le passé comme dans l'avenir.

Mais n'est-il pas possible de réduire à une seule ces formules qui ne diffèrent que par des changements de signes dans les termes?

Or on aperçoit facilement que, si dans la formule (1) on remplaçait $t$ par $-t'$, elle deviendrait (2), et que si l'on y remplaçait $t$ par $-t'$ et $x$ par $-\mathrm{OM}''$ elle deviendrait (3), en y changeant tous les termes de membre. Mais il sera bien entendu que la multiplication de $-t'$ par $v$ se fera suivant les règles des signes démontrées pour le cas des polynômes, et qui n'auront ici aucun sens analogue, les signes que l'on suppose implicitement dans $t$ et $x$ n'ayant

pas d'autre objet que de réunir les trois formules en une seule.

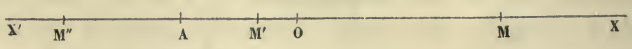
Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Les positions du mobile seront représentées, dans le passé comme dans l'avenir, par l'équation unique (1), aux conditions suivantes : pour toute époque dans l'avenir, $t$ désignera l'intervalle de temps qui la sépare de l'origine; et pour toute époque dans le passé, $t$ désignera — l'intervalle, et cette quantité négative sera traitée suivant les règles démontrées par les quantités non isolées; pour toute position à droite de l'origine O, c'est-à-dire du côté qui est dans le sens du mouvement, $x$ désignera la distance du point à cette origine; et pour toute position à gauche, $x$ sera considéré dans l'équation comme désignant — la distance.

On voit que l'introduction des quantités négatives isolées dans la formule (1), et qui correspond au changement de sens relativement aux origines respectives des temps et des distances, n'a rien d'arbitraire. Il n'y a d'arbitraire que le désir de réunir les trois formules en une seule; mais le moyen est unique et forcé. Et il n'y a aucune règle à démontrer, aucun sens mystérieux à attacher à ces quantités négatives isolées : elles ne produisent la généralisation qu'à la condition d'être traitées suivant les règles établies pour les quantités non isolées.

144. La discussion que nous venons de faire renferme tous les cas où le point A est à droite de l'origine O; il reste donc à examiner les modifications que subissent les formules quand ce point est à gauche (*fig.* 2).

Fig. 2.




Supposons toujours que le mouvement ait lieu vers la

droite. Nous aurons encore à considérer le point dans les trois régions OX, AO, AX′, c'est-à-dire en M, M′ ou M″.

Dans le premier cas, on a

$$OM = AM - AO \quad \text{ou} \quad x = vt - AO;$$

dans le second,

$$OM' = AO - vt;$$

dans le troisième, en désignant par $t'$ le temps antérieur à l'origine,

$$OM'' = AO + vt'.$$

De ces trois formules la seconde rentrerait dans la première si — OM′ était désigné par $x$, ce qui s'accorderait avec le procédé employé dans la première discussion relativement aux points situés à gauche de l'origine. Et cet accord était absolument nécessaire, car, pour qu'un moyen de généralisation soit admissible, il faut que les mêmes choses soient partout entendues de la même manière.

Enfin la dernière formule, dans laquelle on entendrait de même que — OM″ est désigné par $x$, rentrerait encore dans la première, en entendant que $-t'$ soit désigné par $t$, comme nous l'avions déjà fait dans la première discussion. On conclut de là qu'en entendant toujours les signes de $x$ et $t$ de la même manière, toutes les positions du mobile sur la droite indéfinie seront représentées par l'équation unique

$$x = vt - OA.$$

Mais on voit aussi que cette équation rentrerait dans (1), si l'on entendait que $a$ y est remplacé par — OA quand le point A est situé à gauche de l'origine des $x$. Et c'est ce que nous pouvons faire, car c'est toujours entendre que dans la formule type les lettres doivent être remplacées par

— les quantités, quand celles-ci sont en sens contraire à celui qui a été supposé quand on a obtenu cette formule.

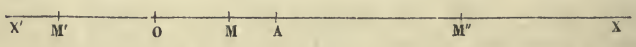
145. Nous avons donc découvert un moyen de renfermer dans la seule équation (1) toutes les variétés que peut présenter la relation entre le temps et la distance, quelle que soit l'époque que l'on veuille choisir, et quelque part que soit situé le mobile à l'instant que l'on choisit comme origine des temps.

Mais il faut aussi reconnaître que nous n'avons pas encore trouvé la solution la plus générale; car nos discussions ont toujours supposé que le mouvement avait lieu dans une même direction, celle que nous avons appelée *de gauche à droite*.

Il nous reste donc à examiner les cas analogues aux précédents, en supposant que la direction du mouvement soit de droite à gauche.

Cette discussion est si semblable à la précédente, que nous croyons inutile de la faire avec autant de détail.

Fig. 3.




Soient toujours O l'origine des distances, A la position du mobile, pour $t = 0$ (*fig.* 3). Sa position après cette époque sera à gauche de A, puisqu'il marche vers la gauche.

En le considérant d'abord entre A et O, on aura évidemment, en désignant par $v'$ la valeur absolue de sa vitesse,

$$(\alpha) \qquad x = a - v't.$$

Quand il aura dépassé O, l'équation n'aura plus la même forme; mais elle rentrera dans ($\alpha$), en supposant toujours que $x$ est remplacé par $-$OM'.

Et dans le temps antérieur à l'origine, le mobile sera à

droite de A, et l'on aura encore une nouvelle forme d'équation qui rentrera de même dans ($\alpha$), en entendant que dans celle-ci $t$ est remplacé par — l'intervalle de temps qui sépare l'époque en question de l'origine.

Le procédé de généralisation employé précédemment permet donc de représenter par l'équation ($\alpha$) toutes les circonstances du mouvement du point qui marche vers la gauche, et est en A, à droite de l'origine O, dans sa position primitive.

On reconnaîtrait, comme précédemment, que cette même équation représente le mouvement dans le cas où le point A serait à gauche de O, pourvu que dans ($\alpha$) $a$ soit alors remplacé par — la distance absolue. D'où résulterait enfin que l'équation ($\alpha$) représente de la manière la plus générale le mouvement d'un point vers la gauche, les signes de $x$, $t$, $a$ étant toujours entendus de la même manière.

Il résulte de là que tous les mouvements possibles seraient représentés par deux équations différentes

$$(1) \qquad x = a + vt,$$

$$(\alpha) \qquad x = a - v't.$$

Or il est clair que la première donnerait la seconde, en y remplaçant $v$ par — $v'$, c'est-à-dire en entendant que dans l'équation (1) $v$ est le nombre absolu qui exprime la vitesse, quand le mouvement a lieu vers la droite, et qu'il doit être remplacé par — ce nombre quand le mouvement a lieu en sens opposé.

146. Nous pouvons donc dire maintenant que nous représentons par la seule équation

$$(1) \qquad x = a + vt$$

le mouvement uniforme d'un point sur une droite dans toutes les variétés de circonstances qu'on pourra supposer.

Il suffira pour cela de considérer les quatre lettres $x$, $a$, $v$, $t$ comme représentant des nombres absolus ou des nombres affectés du signe —, et qui devront être traités par les règles démontrées dans le cas des polynômes. Voici maintenant comment ces signes devront être introduits.

$t$ désignera un nombre absolu d'unités de temps pour les époques dans l'avenir, et — un nombre pour les époques dans le passé.

$x$ désignant le nombre absolu d'unités de longueur, pour les distances des points situés d'un côté de l'origine choisi arbitrairement, $a$ et $v$ seront aussi des nombres absolus quand la position initiale du mobile et le sens de son mouvement seront de ce même côté : et les quantités $x$, $a$, $v$ désigneront — des nombres quand le sens sera opposé. Et toute solution de l'équation (1) en nombres absolus ou négatifs fera connaître l'époque et la position, comme l'aurait fait la formule spéciale à ce cas.

Surtout il ne faut pas oublier que, cette généralisation ayant été démontrée à la condition que toutes les quantités négatives isolées qui seront ainsi introduites seront traitées par les règles des signes démontrées pour les polynômes, il n'y a aucune question à se faire à ce sujet.

147. *Solution générale du problème de la rencontre de deux mobiles.* — Il est bien facile maintenant de trouver les formules générales relatives à la rencontre de deux points qui se meuvent uniformément suivant une même ligne indéfinie, dans des sens et avec des vitesses quelconques, et ayant des positions quelconques à l'époque prise pour origine des temps.

En effet, les deux mouvements seront déterminés respectivement par les deux équations générales

$$x = a + vt,$$
$$x' = a' + v't.$$

Or, si l'on veut connaître l'époque de leur coïncidence, il faut trouver la valeur de $t$ pour laquelle on a

$$x = x' \quad \text{ou} \quad a + vt = a' + v't.$$

On en tire

$$t = \frac{a' - a}{v - v'},$$

et par suite

$$x = \frac{va' - av'}{v - v'} = x'.$$

Lorsque les valeurs particulières des données rendront ces résultats négatifs, cela apprendra respectivement que l'époque est dans le passé, et la position, du côté de l'origine opposé à celui qu'on avait choisi en établissant les formules.

Au lieu de chercher l'époque de la rencontre, on aurait pu demander que les mobiles fussent à une distance donnée l'un de l'autre, ou les assujettir à toute autre condition.

148. *Remarque.* — Si, au lieu de chercher une formule générale pour le mouvement uniforme d'un point, on voulait résoudre immédiatement, et en apparence plus simplement, le problème de la rencontre de deux mobiles, on serait obligé de faire une hypothèse sur la région de la droite où ce point doit se trouver. Si elle conduisait à des solutions négatives pour $t$ ou $x$, on ferait une autre hypothèse, qui peut-être conduirait à une nouvelle impossibilité ; et l'on répéterait ces essais jusqu'à ce qu'on parvînt à des valeurs absolues pour les inconnues. Ces tentatives fastidieuses devraient être répétées pour chaque question particulière du même genre ; et si, dans certains cas simples, on aperçoit de suite si l'époque est dans le passé ou dans l'avenir, et dans quelle partie de la ligne s'effectue

la rencontre, il en est beaucoup d'autres où l'on serait obligé de faire plusieurs essais. Mais la formule générale du mouvement uniforme étant établie une fois pour toutes, on n'a jamais qu'un seul calcul à faire.

Au reste, ce n'est pas seulement l'avantage de la simplicité qu'il faut voir dans la généralisation que nous avons effectuée, c'est surtout cette correspondance remarquable entre le changement de sens par rapport à l'origine soit des temps, soit des distances, et le changement de signe de ces quantités dans la formule générale, qui ne représente qu'à cette condition toutes les positions et toutes les époques.

# CHAPITRE XIX.

## DE QUELQUES TENTATIVES DE DÉMONSTRATION, RELATIVES AU CALCUL DES QUANTITÉS NÉGATIVES ISOLÉES.

149. Dans ce qui précède, nous n'avons introduit la considération des quantités négatives isolées que pour généraliser des formules, et renfermer en un seul les résultats différents de plusieurs calculs analogues. Ces quantités négatives ont été tantôt des données, tantôt des inconnues; et, dans tous les cas, la généralisation étant obtenue à la condition de les traiter de la même manière que si elles n'étaient pas isolées, il n'y avait aucune règle à démontrer, et la recherche de ces règles n'aurait eu absolument aucun sens.

Quant à l'interprétation des valeurs négatives des inconnues, elle ne pouvait offrir aucune difficulté, puisque tout était prévu dès l'origine, et qu'on savait ce qu'indiquerait leur apparition.

Mais, quoiqu'on ait toujours reconnu que les quantités négatives pouvaient généraliser certaines formules, on ne s'est pas toujours assujetti à le démontrer; et des géomètres éminents ont cru possible de démontrer, pour le calcul de ces quantités, des règles qui dispenseraient de toute discussion particulière. Nous allons en indiquer quelques-unes, et l'on reconnaîtra facilement combien elles sont illusoires.

150. *Démonstration de Laplace.* — On trouve les passages suivants dans la première leçon faite à l'École Normale par ce grand géomètre :

« Pour soustraire une quantité algébrique d'une autre,

on écrit, à la suite de la quantité dont on soustrait, la quantité à soustraire, en changeant les signes de tous ses termes, ensuite on fait la réduction. Cette règle est évidente quand le nombre à soustraire a le signe $+$ ; supposons qu'il ait le signe $-$ et que l'on propose de soustraire $-b$ de $a$; je dis que le résultat de l'opération est $a+b$. En effet, le nombre $a=a+b-b$; en retranchant $-b$ sous cette forme, c'est évidemment effacer $-b$, et alors il reste $a+b$.

» Pour effectuer la multiplication, si le multiplicande et le multiplicateur ne renferment qu'un terme, on multiplie leurs coefficients numériques, on ajoute les exposants des lettres semblables.....

» Quant au signe du produit, il doit être positif, si les signes du multiplicande et du multiplicateur sont les mêmes; s'ils sont différents, le signe du produit doit être négatif. Cette règle présente quelques difficultés; on a de la peine à concevoir que le produit de $-a$ par $-b$ soit le même que celui de $a$ par $b$. Pour rendre cette identité sensible, nous observerons que le produit de $-a$ par $+b$ est $-ab$, puisque ce produit n'est que $-a$ répété autant de fois qu'il y a d'unités dans $b$. Nous observerons ensuite que le produit de $-a$ par $b-b$ est nul, puisque le multiplicateur est nul; ainsi le produit de $-a$ par $+b$ étant $-ab$, le produit de $-a$ par $-b$ doit être d'un signe contraire, ou égal à $+ab$, pour le détruire.

» Quant à la division, si le dividende et le diviseur ne renferment qu'un seul terme, on divise le coefficient numérique du dividende par celui du diviseur, etc. Enfin on donne au quotient le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que les signes du dividende et du diviseur sont les mêmes ou contraires. Tout cela résulte de ce que le produit du quotient par le diviseur est égal au dividende. »

Dans tout cela Laplace suppose les quantités négatives isolées; et si d'abord il considère la soustraction d'un po-

lynôme, il l'abandonne aussitôt pour se demander comment soustraire $-b$ de $a$, question qui n'a aucun sens. Pour y répondre, il ajoute et retranche $b$ de $a$, ce qui lui donne $a+b-b$, et il regarde comme évident que retrancher $-b$ c'est l'effacer, ce qui est un non-sens double; car c'est d'abord supposer qu'on attache un sens à la soustraction de $-b$, qui n'en a aucun, et ensuite que la soustraction algébrique soit la suppression non pas d'un nombre, mais d'une opération.

151. Passons à la multiplication. Il admet que $-a$ multiplié par $+$ donne $-ab$, par la raison que c'est la répétition de $-a$ un nombre de fois marqué par $b$. Mais si $-a$ isolé n'a aucun sens, que signifie la répétition de $-a$? Cela admis, il remarque que tout produit dont le multiplicateur est $b-b$ doit être nul; d'où il conclut que $-a$ multiplié par $b-b$ donne pour produit zéro. Or $-a$ multiplié par le premier terme $b$ donne, comme il vient de l'établir, $-ab$; donc il est nécessaire que le second terme, ou le produit de $-a$ par $-b$, donne $+ab$ pour le détruire.

Cette démonstration pèche d'abord comme la précédente, en ce qu'on se propose de multiplier $-a$, ce qui n'a pas de sens. Et ensuite, en prenant pour multiplicateur $b-b$ qui est un polynôme, la quantité négative $-b$ n'est plus isolée : de telle sorte que, s'il avait pris un multiplicande réel, par exemple $m-a$, il aurait démontré que $-a$ multiplié par $-b$ donne un terme $+ab$ au produit, quand $-a$ et $-b$ sont des termes de facteurs polynômes. Il ne prend donc même pas la question qu'il annonçait, savoir la multiplication de deux quantités négatives isolées.

Quant à la division de deux monômes, dont l'un au moins est négatif, c'est de même une opération qui n'a pas de sens, et qu'il ramène à la multiplication d'après la définition qu'on en donne quand elle signifie quelque chose.

Et nous dirons généralement que toute démonstration de règles sur les quantités négatives isolées ne peut être qu'une illusion, puisqu'il n'y a aucun sens à attacher à des opérations arithmétiques sur des choses qui ne sont pas des nombres, et n'ont aucune existence réelle.

### SI LES QUANTITÉS NÉGATIVES ISOLÉES DOIVENT ÊTRE DITES PLUS PETITES QUE ZÉRO.

152. Euler, dans son *Introduction à l'Analyse infinitésimale,* a dit que les quantités négatives étaient moindres que zéro.

D'Alembert, dans le premier volume de ses *Opuscules mathématiques,* s'exprime ainsi à ce sujet :

« Qu'il me soit permis de remarquer combien est fausse l'idée qu'on donne quelquefois des quantités négatives, en disant que ces quantités sont au-dessous de zéro. Indépendamment de l'obscurité de cette idée envisagée métaphysiquement, ceux qui voudront la réfuter par le calcul pourront se contenter de considérer cette proportion

$$1 : -1 :: -1 : 1,$$

proportion réelle, puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, et que d'ailleurs $\frac{1}{-1} = -1$ et $\frac{-1}{1} = -1$. Cependant, si l'on regardait les quantités négatives comme au-dessous de zéro, 1 serait $> -1$, et $-1 < 1$ ; ainsi il ne pourrait y avoir proportion. Il est vrai que M. Leibnitz prétend que $-1$ n'est pas moyen proportionnel entre 1 et 1, non plus que $-2$ entre 1 et 4, quoiqu'il avoue que $-2 \times -2 = 1 \times 4$, « parce que les » quantités négatives, dit-il, entrent dans le calcul sans » entrer dans les rapports, et que des fractions ne sont pas

» la même chose que des rapports. » J'avoue que je ne sens point la force ni la vérité de cette raison : elle tendrait à renverser toutes les notions algébriques par des limitations inutiles et forcées ; et elle ne serait juste d'ailleurs qu'en supposant que les quantités négatives sont au-dessous de zéro, ce qui n'est pas. »

153. Carnot approuve la réfutation de d'Alembert, et s'exprime en ces termes, au commencement de sa *Géométrie de position :*

« Les notions qu'on a données jusqu'ici des quantités négatives isolées se réduisent à deux : celles dont nous venons de parler, savoir que ce sont des quantités moindres que zéro ; et celle qui consiste à dire que les quantités négatives sont de même nature que les positives, mais prises dans un sens contraire. D'Alembert détruit l'une et l'autre de ces notions. Il repousse d'abord la première par un argument qui me paraît sans réplique.

» Soit, dit-il, cette proportion :

$$1 : -1 :: -1 : 1.$$

Si la notion combattue était exacte, c'est-à-dire si $-1$ était plus petit que zéro, à plus forte raison serait-il moindre que $1$ ; donc le second terme de cette proportion serait moindre que le premier ; donc le quatrième devrait être moindre que le troisième, c'est-à-dire que $1$ devrait être moindre que $-1$ ; donc $-1$ serait tout ensemble moindre et plus grand que $1$, ce qui est contradictoire. »

154. Ces diverses opinions sont aussi peu fondées les unes que les autres.

Et d'abord, quand on nie que les quantités négatives soient moindres que zéro, il faudrait demander à ceux qui l'affirment ce qu'ils entendent par là ; autrement on ne

saurait pas ce que l'on nie. Et, si on l'avait fait, on aurait fini par s'entendre; car il n'est jamais venu à l'esprit de personne de prétendre qu'il y ait quelque chose de plus petit que rien.

Quant à la prétendue démonstration de d'Alembert, approuvée par Carnot, il est bien étrange que ces deux illustres géomètres n'en aient pas aperçu le défaut.

Que signifie cette proportion $1 : -1 :: -1 : 1$? d'où vient-elle? comment l'entend-on? Est-elle résultat ou donnée? Si l'on entend qu'on fasse les divisions d'après les règles des signes dans le cas des polynômes, on dira en effet que le rapport $\frac{1}{-1}$ est $-1$, comme le second $\frac{-1}{1}$; et l'on pourra appeler leur égalité une *proportion*. Mais on n'attachera réellement aucun sens à ces opérations, et les remarques faites dans le cas des véritables proportions n'auront aucune raison de s'appliquer ici : et l'on ne pourrait dire que, si le premier terme d'un rapport est plus grand que le second, il en doit être de même dans l'autre. Quelle définition donnera-t-on de *plus grand* ou *plus petit,* relativement à des choses qui ne sont pas des grandeurs?

Ces observations suffisent pour montrer le vide de ces simulacres de raisonnements, qui se font sur des choses non définies, sans existence réelle, et où l'on se sert de propositions établies sur des grandeurs véritables.

155. Nous ajouterons cependant que si nous avons soulevé cette question, ce n'est pas seulement pour mettre en garde contre ce que l'on dit de défectueux à son sujet: c'est aussi pour montrer comment, contrairement à l'opinion de d'Alembert et de Carnot, il peut y avoir lieu de considérer les quantités négatives comme plus petites que zéro. Il est nécessaire pour cela de rappeler les premiers principes du calcul des inégalités, qui sont si simples, que

nous n'avons pas cru devoir nous en occuper spécialement, mais qui nous offriront des discussions intéressantes dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

Lorsqu'une inconnue doit satisfaire à une condition d'inégalité, on en tire non une valeur, mais une limite, supérieure ou inférieure, pour cette inconnue. Pour y parvenir on fait passer les termes d'un membre dans l'autre, suivant les mêmes règles que pour les équations ; et comme on peut multiplier ou diviser par un même nombre absolu les deux membres d'une inégalité sans en changer le sens, on pourra chasser les dénominateurs, et réunir dans un même membre tous les termes affectés de l'inconnue ; il suffira alors de diviser les deux membres par son coefficient, pour avoir la valeur et le sens de la limite cherchée. Mais si les nombres connus sont représentés par des lettres dont les valeurs puissent être prises arbitrairement, on sera exposé, comme dans le calcul des équations, à trouver des soustractions impossibles quand on particularisera ces valeurs ; et l'un des membres, ou même tous les deux, pourront se présenter sous la forme de quantités négatives.

Si, par exemple, en partant de l'inégalité

$$(1) \qquad a + b < c + d,$$

on tire

$$(2) \qquad a - c < d - b,$$

et que dans un cas particulier on ait

$$d = b,$$

et, par suite,

$$a < c,$$

d'après (1), (2) se réduira à

$$(3) \qquad a - c < 0;$$

et, comme $a - c$ est négatif, l'inégalité (3) exprime qu'une quantité négative est plus petite que zéro.

Et c'est ce que l'on trouvera toutes les fois que l'on retranchera des deux membres d'une inégalité une quantité égale au plus grand membre, comme on l'a fait sur (1), dont on a retranché $c + b$ ou son égal $c + d$ aux deux membres.

Au reste, (3) n'est qu'une manière d'écrire $a < c$, et l'on devra préférer cette dernière; mais l'autre n'aura aucun inconvénient, si l'on sait qu'elle provient de ce que l'on a soustrait une quantité trop forte aux deux membres. Et comme on ne sait pas toujours si les soustractions seront possibles dans les cas particuliers que l'on pourra avoir à considérer, il faut se résigner à accepter cette forme de l'inégalité, ou ne pas faire le calcul général. Mais ce serait se priver de l'avantage des solutions générales, et sans aucun intérêt, puisque la forme bizarre du résultat est interprétée d'avance, et pourra être changée sans difficulté.

Et si l'on avait retranché des deux membres une quantité qui, dans un cas particulier, se trouverait supérieure au plus grand membre, les deux membres se trouveraient négatifs, et celui qui aurait la plus grande valeur absolue serait indiqué comme le plus petit; de sorte que les quantités négatives seraient appelées d'autant plus petites que leur valeur absolue serait plus grande. Et tout cela serait d'accord avec les propositions qui ont lieu dans le cas des nombres absolus. Par exemple, si l'on ajoute une quantité absolue plus petite qu'une seconde, la somme est moindre que si l'on ajoutait la seconde; or il en sera de même pour l'addition de quantités négatives, telle qu'on l'entend, pourvu qu'on regarde comme la moindre de deux quantités négatives celle qui a la valeur absolue la plus grande.

Au reste, les inégalités dont les deux membres sont négatifs prendront une forme réelle, en faisant passer res-

pectivement les termes d'un membre dans l'autre; et c'est ce qu'on aurait fait d'abord si l'on avait prévu que les résultats auraient été négatifs. Ainsi l'inégalité $-5 < -3$ deviendra $3 < 5$; l'inégalité $-2 < 0$ deviendra $0 < 2$. Si cependant il y avait le moindre avantage à les laisser sous l'autre forme, il faudrait le faire, puisque les résultats s'interpréteront toujours sans difficulté.

156. Ce que nous venons de dire s'applique à toutes les transpositions de termes, et généralement aux additions ou soustractions des membres des inégalités. Si l'on effectue ces opérations suivant les règles ordinaires, et sans s'inquiéter des signes des membres, les résultats seront toujours exacts, et réductibles à une forme intelligible par elle-même. Mais quand on veut faire des multiplications ou des divisions sur les deux membres d'une inégalité, il faut avoir grand soin de s'assurer si ces multiplicateurs ou diviseurs sont des nombres absolus, ou, comme on le dit, des nombres positifs. Car, d'après la manière dont on entend les opérations sur les quantités négatives, on multipliera par $-a$ en multipliant par $a$ et changeant le signe du produit. Si donc on commence par multiplier ou diviser les deux membres de l'inégalité par $a$, on aura une inégalité vraie ; mais si l'on change ensuite les signes des deux membres, il faut renverser le sens de l'inégalité ; car le changement de signe de tous les termes revient à un changement de membre.

Nous n'en dirons pas davantage sur ce sujet : les cas que nous omettons s'expliqueront toujours sans difficulté par les mêmes considérations. Et la conclusion de cette discussion est que, si l'on veut avoir des procédés généraux pour le calcul des inégalités, on est forcé de dire que les quantités négatives sont traitées comme plus petites que zéro, et d'autant moindres qu'elles ont plus de valeur

absolue ; et que les expressions *plus petit* et *plus grand* seront appliquées d'après les mêmes principes que pour les quantités absolues. En procédant ainsi on n'est exposé à aucune erreur, à aucune difficulté, et on a l'avantage de la généralité. Mais si l'on rejette les formes d'inégalités qui expriment qu'une quantité négative est plus petite que zéro, on s'interdit tout calcul sur des inégalités dont les termes sont littéraux ; et l'on ne concevrait pas qu'après avoir admis les quantités négatives pour généraliser le calcul des équations, on s'y refusât dans le cas des inégalités, lorsqu'il est bien entendu qu'on ne veut pas dire qu'il existe quelque chose de plus petit que rien, et que l'inégalité qui le dit n'est qu'une forme sans danger qu'on peut changer dès qu'on y aura quelque intérêt.

# CHAPITRE XX.

## DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

157. Lorsqu'une équation dont les dénominateurs ne renferment pas l'inconnue est composée de termes où entrent en facteurs, dans les uns le carré, dans les autres la première puissance de cette inconnue, et de termes tout connus, on dit que cette équation est du second degré.

Dans le cas simple où les termes du premier degré manqueraient, on commencerait par tirer la valeur du carré de l'inconnue, comme on ferait pour une équation du premier degré. Connaissant ce carré, il n'y aurait plus qu'à extraire la racine d'un nombre connu, ce qui rentre dans les opérations dont nous avons parlé précédemment.

Il est naturel de chercher à ramener à ce cas celui où l'équation est complète ; et nous commencerons par expliquer le procédé sur une équation particulière. Supposons, par exemple, qu'un problème ait conduit, pour la détermination de l'inconnue $x$, à l'équation

$$(1) \qquad 3x - x^2 = 2.$$

Il est clair qu'on ne pourrait tirer de là le carré de $x$ égal à un nombre donné ; mais il n'est pas difficile d'apercevoir qu'on en peut tirer le carré d'un binôme dont le premier terme sera $x$, et le second un nombre connu. Or, cela étant fait, la racine du nombre égal à ce carré sera le binôme même, d'où se déduira $x$.

Pour y parvenir, il suffit de se rappeler que le carré

d'un binôme, dont l'un des termes est $\pm x$ et le second terme un nombre connu, a l'un de ses termes égal à $x^2$, et un autre égal au produit du premier terme du binôme par le double du second. D'où il suit que, si l'on place $x^2$ et $x$ dans le membre où $x^2$ n'aura pas le signe —, on connaîtra immédiatement le binôme dont le carré aura ses deux premiers termes identiques à ceux de l'équation. D'après cette remarque, nous mettrons l'équation proposée sous la forme

$$(2) \qquad x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Or, $-3x$ devant être le double produit du premier terme du binôme par le second, en suivant la règle connue des signes, il faut que ces deux termes soient de signes contraires et le second égal en valeur à la moitié de 3 ; le binôme est donc

$$x - \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2} - x,$$

et son carré

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4}.$$

Si donc on ajoute et qu'on retranche $\frac{9}{4}$ au premier membre de l'équation (2), elle pourra s'écrire de l'une des deux manières suivantes :

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0,$$

ou, en faisant passer les termes connus dans le second membre et réduisant,

$$(3) \qquad \begin{cases} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\ \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

De sorte que toute valeur qui, mise pour $x$, satisfera à l'équation (1), satisfera nécessairement à l'une de ces deux-ci, et toute solution de l'une des deux le sera de (1).

La première des équations (3) suppose $x > \frac{3}{2}$, et la seconde $x < \frac{3}{2}$. En prenant les racines carrées des deux membres, les résultats numériques doivent nécessairement être égaux, et, par conséquent, la première donne comme conséquence, avec réciprocité,

$$x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 2,$$

et la seconde

$$\frac{3}{2} - x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

Il est donc nécessaire, pour que (1) soit satisfaite, que l'on prenne, pour valeur de $x$, 2 ou 1; et réciproquement, cela est suffisant.

Et il est évident qu'on arriverait à ces deux mêmes équations du premier degré en écrivant que la racine du deuxième membre est $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$, au lieu d'écrire que celle du premier membre est $x - \frac{3}{2}$ ou $\frac{3}{2} - x$.

158. On voit par cet exemple qu'il est possible que deux nombres différents satisfassent à une même équation du second degré. Mais il n'en est pas toujours ainsi, et, avant de présenter la théorie générale de ces équations, nous allons commencer par faire connaître, sur des cas particuliers, les diverses circonstances qu'elles peuvent présenter.

On remarquera d'abord qu'il est possible que l'équation ne soit satisfaite que par un nombre unique; et c'est ce qui arrivera quand les trois termes placés dans le même membre formeront exactement le carré d'un binôme.

Si, par exemple, il fallait satisfaire à l'équation

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

le premier membre étant le carré de

$$x - 2 \quad \text{ou de} \quad 2 - x,$$

on ne pourrait l'égaler à zéro qu'en y égalant sa racine $x - 2$ ou $2 - x$, ce qui donne une seule et même valeur 2.

159. Il pouvait encore arriver, comme dans les équations du premier degré, qu'on trouvât des solutions négatives. Si, par exemple, l'équation était

$$(4) \qquad x^2 - 4x = 5,$$

on compléterait le carré dont les deux premiers termes sont

$$x^2 - 4x,$$

en ajoutant 4 aux deux membres, et l'on obtiendrait

$$(5) \qquad x^2 - 4x + 4 = 9.$$

Or le premier membre ne peut être que le carré de $x - 2$ ou de $2 - x$; et l'équation pourra se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$(6) \qquad (x - 2)^2 = 9 \quad \text{ou} \quad (2 - x)^2 = 9.$$

La première conduit à

$$(7) \qquad x - 2 = 3 \quad \text{ou} \quad x = 5,$$

la seconde à

$$(8) \qquad 2 - x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -1.$$

Il n'y a donc aucun nombre satisfaisant à la seconde, et l'équation (1) n'est satisfaite que par le nombre 5.

Mais il faut bien remarquer ici, comme dans les équations du premier degré, que l'expression négative $-1$, substituée à $x$ dans (4), et traitée par les règles ordinaires des signes, y satisfait.

En effet, elle rend identiques les deux membres de la seconde des équations (8), puis ceux de la première par le changement de place des termes ; il en est de même, par suite, des deux membres de la seconde équation (6), puis de (5), et enfin de (4).

C'est dans ce sens qu'on dit que l'équation (4) a deux racines, l'une positive, l'autre négative : et, d'après ce que nous avons démontré généralement (Chapitre XVII), le trinôme $x^2 - 4x - 5$ serait le produit des deux facteurs

$$(x-5), \quad (x+1).$$

La même remarque s'applique aux cas précédents.

160. *Autre exemple.* — Soit

$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

En agissant comme dans les cas précédents, on obtiendra

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

ou

$$\left(-x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Car le trinôme $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$, qui est le produit de la multiplication de $x + \frac{3}{2}$ par lui-même, le serait aussi par celle de $-x - \frac{3}{2}$ par lui-même, en s'assujettissant à la règle ordinaire des signes ; et à cette condition, on ne peut prendre d'autres signes ni d'autres termes pour reproduire le même

trinôme. On peut donc dire qu'à cette condition on peut satisfaire de deux manières à l'équation proposée, savoir en posant

$$\left.\begin{array}{r}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\\ \text{ou}\\ \left(-x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\end{array}\right\},\quad \text{d'où}\quad \left\{\begin{array}{l}x+\frac{3}{2}=\frac{1}{2},\\ -x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2},\end{array}\right.$$

équation qu'on pourrait réunir en une seule

$$\pm\left(x+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

ou encore

$$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2}.$$

La première donne

$$x=-1,$$

la seconde

$$x=-2.$$

Ces deux expressions, substituées successivement à $x$ dans la proposée, rendraient ses deux membres égaux ; et le polynôme $x^2+3x+2$ serait le produit des deux facteurs

$$(x+1)(x+2).$$

Tout cela se reconnaîtrait comme dans les cas précédents.

161. *Dernier exemple.* — Enfin il peut se présenter encore des circonstances d'un genre différent, et qui pourraient laisser quelque obscurité dans l'esprit si l'on ne se rendait pas bien compte, tout d'abord, de la manière dont elles doivent être entendues.

Considérons à cet effet l'équation

$$(1) \qquad 2x - x^2 = 5.$$

En agissant comme dans les cas précédents, on obtiendra d'abord

$$x^2 - 2x = -5,$$

puis

$$(2) \qquad (x-1)^2 = -4.$$

Or, avant d'aller plus loin, on reconnaît qu'aucun nombre positif ou négatif mis pour $x$ ne peut rendre égaux les deux membres de cette dernière équation; car, soit que $x - 1$ soit un nombre absolu, ou un nombre précédé du signe —, si l'on suit toujours les règles ordinaires des signes, son carré sera un nombre absolu, et ne pourra être identique à $-4$. D'où il suit qu'aucun des moyens de solution, précédemment reconnus, ne s'appliquerait ici.

On pourrait s'arrêter là, après avoir reconnu l'impossibilité de satisfaire à la proposée par des valeurs positives ou négatives ; et l'on ne rencontrerait ainsi ni difficultés, ni la moindre obscurité.

Ce qui peut en introduire, c'est de vouloir aller plus loin, sans se rendre compte ni de ce qu'on veut, ni de ce qu'on fait.

Or, si l'on veut continuer le calcul sur l'équation (2), comme dans les cas où il n'y avait pas d'impossibilité, jusqu'à ce que l'un des membres soit $x$, et le second, une indication d'opérations sur des nombres, on écrira successivement

$$(3) \qquad \begin{cases} x - 1 = \pm\sqrt{-4}, \\ x = 1 \pm \sqrt{-4}, \end{cases}$$

expressions insignifiantes, mais telles, que si on les substitue à $x$ dans (1), en suivant les règles des signes et traitant la

racine de $-4$ comme si c'était vraiment un nombre, c'est-à-dire en entendant que son carré sera $-4$, on trouvera les deux membres identiques, tant dans leurs parties réelles que dans leurs parties imaginaires. Et cela ne saurait étonner, puisque les équations (3) deviennent des identités quand on y met, au lieu de $x$, $1 \pm \sqrt{-4}$.

En élevant les deux membres au carré, de la manière que nous venons d'indiquer, les deux membres (2) seront identiques, et par suite ceux de la proposée (1). Mais il ne faut pas voir là des opérations véritables. Toutes les équations qui ont été écrites n'étaient en quelque sorte que des manières différentes d'écrire la première, dans la supposition que les opérations se faisaient d'après les principes ordinaires ; il devait donc forcément arriver que si l'on rendait identiques les deux membres de la dernière, par une substitution indiquant des opérations connues, mais dans ce cas dépourvues de sens, en remontant jusqu'à la première et effectuant les opérations d'après les principes ordinaires, toutes les équations par lesquelles on passerait ainsi présenteraient la même identité.

Si l'on applique, par exemple, le principe que la racine d'un produit est le produit des racines, et qu'on regarde $-4$ comme le produit de $4$ par $-1$, on écrira

$$\sqrt{4}\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{-1},$$

au lieu de $\sqrt{-4}$ ; c'est ce que l'on fait ordinairement, et l'on fait porter ainsi ce que l'on appelle l'*imaginaire* sur $-1$.

Aux mêmes conditions, le trinôme $x^2 - 2x + 5$ sera le produit des deux facteurs du premier degré

$$x - 1 + 2\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad x - 1 - 2\sqrt{-1};$$

ce que l'on trouve en effet en faisant la multiplication, comme il a été indiqué.

## ÉQUATIONS LITTÉRALES DU SECOND DEGRÉ.

162. Si l'on veut résoudre généralement les équations du second degré, et trouver des formules au lieu de résultats numériques, il faudra représenter les quantités connues par des lettres. Il y aura encore, comme dans le cas des équations du premier degré, à considérer les diverses combinaisons de signes que l'équation peut présenter ; et, comme dans ce cas, on remarquerait que les calculs faits pour deux combinaisons différentes se correspondraient toujours de telle sorte, qu'on passerait des uns aux autres par le simple changement de signe des lettres qui sont facteurs dans les termes qui ont des signes différents dans les équations d'où l'on part ; en entendant toujours que les opérations s'effectueront d'après les principes établis dans le cas où toutes ces opérations ont un sens réel.

Il suit de cette remarque qu'il suffit de faire le calcul pour une seule combinaison des signes ; et il convient de prendre celle qui sera la plus commode à retenir et à appliquer ; et ce sera évidemment celle où tous les termes, étant placés dans un même membre, seront affectés du même signe.

Soit donc proposée l'équation

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0.$$

En complétant le carré, dont les deux premiers termes sont $x^2 + px$, par l'addition de $\frac{p^2}{4}$, et faisant passer $q$ dans le second membre, l'équation (1) prendra la forme

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \quad \text{ou} \quad \left(-x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

les multiplications s'effectuant d'après les règles des signes établies pour les polynômes.

Prenant les racines carrées des deux membres, on pourra satisfaire à (1) de deux manières, et les deux équations du premier degré qui les feront connaître pourront s'écrire ainsi :

$$(2) \qquad x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

$p$ et $q$ pourront être implicitement négatifs, et toute expression qui rendra identiques les deux membres de l'équation (2) rendra de même identiques ceux de l'équation (1), en entendant toujours que les règles des signes seront suivies, et que le carré de $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ soit dans tous les cas remplacé par $\frac{p^2}{4} - q$, quel que soit le signe de cette dernière expression, et l'identité aura lieu séparément dans les parties réelles et dans les parties imaginaires.

On tire de (2) les deux valeurs suivantes pour $x$:

$$(3) \qquad x = -\frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

et ces expressions substituées à $x$ dans $x^2 + px + q$, les opérations étant effectuées comme nous l'avons dit, la partie réelle sera nulle, ainsi que le coefficient de $\sqrt{-1}$.

**163.** Pour obtenir les solutions d'une équation numérique quelconque, on fera la substitution à $p$ et $q$ des nombres correspondants dans cette équation particulière, en tenant compte des signes de la manière constamment entendue.

Si, par exemple, on veut appliquer la formule (3) à la

première équation que nous avons considérée

$$3x - x^2 = 2,$$

on commencera par la réduire à la forme (1), en faisant passer tous les termes dans le même membre, où $x^2$ aura le signe $+$, ou n'aura pas de signe en le plaçant le premier ; on aura ainsi

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

et l'on voit qu'il faudra supposer $p = -3$ et $q = 2$ pour que (1) devienne l'équation proposée ; la formule (3) deviendra alors

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Les deux valeurs de $x$ seront donc 2 et 1.

Nous n'insisterons pas davantage sur la manière dont on devra entendre les formes réelles négatives ou imaginaires que peut présenter la formule (3) ; et nous ne pensons pas qu'après les observations que nous avons faites il puisse rester à ce sujet la moindre obscurité. Quant aux détails intéressants que peuvent présenter les équations du second degré, et qui ne présentent aucune difficulté réelle, nous renvoyons aux Traités élémentaires d'Algèbre.

### EXTENSION DE QUELQUES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS AU CAS DES IMAGINAIRES.

**164.** Dans le Chapitre XV, nous avons démontré que, si un polynôme de degré $m$ était rendu nul pour $m$ valeurs différentes de $x$, positives ou négatives, il était égal au produit de $m$ facteurs du premier degré, ayant pour premier terme $x$ et pour second chacune des valeurs respectives qui l'annulent, changées de signes, multiplié en outre par

le coefficient du premier terme du polynôme. Nous avons démontré ensuite qu'un polynôme du degré $m$ ne peut s'annuler pour plus de $m$ valeurs différentes de $x$, que lorsque les coefficients des différentes puissances de $x$ sont tous nuls séparément : ce qui a conduit à cette autre proposition, que deux polynômes qui prennent des valeurs égales quand on substitue successivement plus de valeurs à $x$ qu'il n'y a d'unités dans le degré le plus élevé, sont les mêmes, terme pour terme.

Nous nous proposons d'étendre ces théorèmes au cas où les expressions qui annulent le polynôme sont imaginaires, de la forme de celles que nous ont présentées les racines des équations du second degré. Et, pour bien préciser la question, nous entendons que les opérations se feront suivant les règles démontrées pour les quantités réelles, sans y attacher aucune idée de quantité ; et que l'on ne réduira jamais entre eux que les termes réels d'une part, et les termes imaginaires d'une autre, par la simple réduction des coefficients de $\sqrt{-1}$.

Et lorsque nous dirons qu'une expression imaginaire substituée à $x$ rend un polynôme nul, nous entendrons toujours que la substitution, effectuée d'après les procédés que nous venons d'indiquer, donne une partie réelle nulle d'elle-même, et pour $\sqrt{-1}$ un coefficient nul de lui-même.

Il résultera de cette manière d'opérer que le produit de plusieurs expressions imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$ sera aussi de même forme, et qu'il sera indépendant de l'ordre dans lequel les multiplications seront faites ; car il en est ainsi pour le produit de binômes réels, qui contient les mêmes termes dans un ordre différent, dans quelque ordre qu'on ait multiplié les facteurs. Or, dans le cas des facteurs imaginaires, on fait les multiplications de la même manière que s'ils étaient réels ; les termes seront donc nécessairement les mêmes dans quelque ordre qu'on effectue

la multiplication des expressions imaginaires en nombre quelconque.

165. Cela posé, nous allons démontrer que, de même que dans le cas des facteurs réels, le produit de plusieurs facteurs imaginaires ne peut devenir nul que si l'un de ses facteurs est nul. Pour cela, considérons d'abord le produit de deux facteurs

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha' + \beta'\sqrt{-1}),$$

qui est

$$\alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\sqrt{-1};$$

pour qu'il soit nul, il faut, d'après ce qui a été entendu, que l'on ait séparément

$$\alpha\alpha' - \beta\beta' = 0, \quad \alpha\beta' + \alpha'\beta = 0.$$

Or nous allons prouver que ces deux équations exigent que l'on ait ou $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ou $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$. En effet, supposons que ni $\alpha$, ni $\beta$ ne soient nuls ; tirant de la première équation $\beta' = \frac{\alpha\alpha'}{\beta}$, et le reportant dans l'autre, on aura, en multipliant ensuite par $\beta$,

$$\alpha'(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

ce qui exige qu'on ait

$$\alpha' = 0,$$

et, par suite,

$$\beta' = 0.$$

Si l'une des deux quantités $\alpha$, $\beta$ était seule nulle, on arriverait à la même conséquence; car, si $\alpha = 0$, les équation précédentes deviennent

$$\beta\alpha' = 0, \quad \beta\beta' = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha' = 0, \quad \beta' = 0,$$

puisque $\beta$ n'est pas zéro. Et, si c'est $\beta$ qui est nul, elles deviennent

$$\alpha\alpha' = 0, \quad \alpha\beta' = 0,$$

et, comme $\alpha$ n'est pas nul, il faudra encore

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0.$$

Concluons donc généralement que, *pour que le produit de deux expressions imaginaires de la forme* $a + b\sqrt{-1}$ *soit nul, il faut que l'une des deux le soit.*

166. On peut étendre cette proposition à un nombre quelconque $m$ de facteurs imaginaires ou réels; le produit peut être considéré comme résultant de la multiplication de deux facteurs, l'un qui serait le produit des $m-1$ premiers et serait encore de la forme $a + b\sqrt{-1}$, $b$ ou $a$ pouvant être nuls, l'autre qui serait le dernier des facteurs proposés. Il faudra donc, pour que leur produit soit nul, ou que ce dernier facteur soit nul, ou que le produit des $m-1$ premiers le soit. Supposons que le dernier facteur ne soit pas nul, le produit des $m-1$ premiers le sera donc. De même, si le dernier de ce produit, ou l'avant-dernier des proposés n'est pas nul, le produit des $(m-2)$ premiers le sera. En continuant ainsi, on arriverait jusqu'au premier facteur, si aucun des autres n'était nul, et il faudrait que ce premier le fût.

Donc, *pour que le produit de m expressions réelles ou imaginaires de la forme* $A + B\sqrt{-1}$ *soit nul, il faut que l'une de ces expressions au moins le soit.*

167. Si un polynôme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Tx + U$$

est rendu nul par une expression de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$,

il sera divisible par $x - \alpha - \beta\sqrt{-1}$. En effet, d'après la manière dont nous opérons sur les imaginaires, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ entrera partout comme entrerait $a$ si l'on divisait par $x - a$; or nous savons que dans ce cas le reste s'obtient en substituant $a$ à $x$ dans le polynôme. Donc le reste de la division par $x - \alpha - \beta\sqrt{-1}$ ne sera autre chose que le résultat de la substitution de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, et sera nul d'après l'hypothèse. Donc le polynôme proposé est le produit de

$$x - \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

par un quotient du degré $m - 1$, qui serait réductible à la forme $M + N\sqrt{-1}$; et l'on pourra écrire

$$\begin{aligned} &Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Tx + U \\ &\quad = (x - \alpha - \beta\sqrt{-1})(Ax^{m-1} + B_1x^{m-2} + \ldots + T_1x + U_1). \end{aligned}$$

168. Si un polynôme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Tx + U$$

est rendu nul par $m$ expressions différentes, imaginaires ou réelles, il peut être regardé comme le produit de $m$ facteurs du premier degré, et de son premier coefficient A. En effet, puisqu'il admet une *racine* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, il peut, d'après ce qui vient d'être démontré, se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &Ax^m + \ldots + U \\ &\quad = (x - \alpha - \beta\sqrt{-1})(Ax^{m-1} + B_1x^{m-2} + \ldots + T_1x + U_1). \end{aligned}$$

Maintenant ce produit devant, d'après l'hypothèse, devenir nul quand on met pour $x$ une expression $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ différente de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, le premier facteur ne s'annulant pas, il faudra que le second s'annule ; d'où il suit qu'il

sera divisible par $x - \alpha' - \beta' \sqrt{-1}$, et pourra se mettre sous la forme

$$(x - \alpha' - \beta' \sqrt{-1})(\mathrm{A}x^{m-2} + \mathrm{B}_2 x^{m-3} + \ldots + \mathrm{U}_2),$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}x^m + \ldots + \mathrm{U} \\ &\quad = (x - \alpha - \beta \sqrt{-1})(x - \alpha' - \beta' \sqrt{-1})(\mathrm{A}x^{m-2} + \ldots + \mathrm{U}_2). \end{aligned}$$

On continuera ainsi jusqu'à la $m^{\text{ième}}$ racine du polynôme, et l'on aura, comme nous l'avions énoncé,

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m-1} + \ldots + \mathrm{T}x + \mathrm{U} \\ &\quad = \mathrm{A}(x - \alpha - \beta \sqrt{-1})(x - \alpha' - \beta' \sqrt{-1}) \ldots \\ &\qquad \times (x - \alpha^{(n-1)} - \beta^{(n-1)} \sqrt{-1}). \end{aligned}$$

169. Enfin, si le polynôme de degré $m$ était rendu nul par plus de $m$ expressions différentes, réelles ou imaginaires, il s'ensuivrait qu'il est identiquement nul, c'est-à-dire que les coefficients des différentes puissances de $x$ sont tous nuls séparément; d'où il suivra que le polynôme serait zéro, quelque expression réelle ou imaginaire qu'on substituât à $x$. En effet, considérant $m$ de ses racines supposées, c'est-à-dire des expressions qui l'annulent, il sera décomposé en $m$ facteurs du premier degré en $x$, et en outre du facteur A.

Maintenant il doit s'annuler par une nouvelle expression qui n'annule aucun des facteurs autres que A; donc il y aurait contradiction si l'on n'avait pas $\mathrm{A} = 0$, et, par conséquent, le polynôme proposé a tous ses coefficients nuls, comme nous l'avions démontré dans le cas des racines réelles, par des raisonnements que nous reproduisons ici en les abrégeant.

*Corollaire.* — On conclut de là que, si deux polynômes

de degré $m$ sont égaux quand on substitue à $x$ successivement plus de $m$ valeurs différentes, réelles ou imaginaires, ils sont les mêmes terme pour terme.

Le théorème analogue, démontré pour le cas de plusieurs variables, s'étend ainsi au cas où les valeurs données à ces variables sont imaginaires.

170. *Remarque.* — Si un polynôme, dont les coefficients sont tous réels, est rendu nul pour $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, il le sera aussi par $x = \alpha - \beta\sqrt{-1}$.

En effet, dire qu'il s'annule par la substitution de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ à $x$, c'est dire que la partie réelle du résultat est nulle, ainsi que le coefficient de $\sqrt{-1}$. Or, d'après la manière dont nous effectuons ces opérations, le résultat de la substitution de $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ ne différera du premier que par le signe de $\sqrt{-1}$; il sera donc nul comme le premier.

Il suit de là que, si le polynôme est de degré $m$, il pourra être mis sous la forme

$$(x - \alpha - \beta\sqrt{-1})(x - \alpha + \beta\sqrt{-1})(\mathrm{A}x^{m-2} + \ldots + \mathrm{V}),$$

ou

$$(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)(\mathrm{A}x^{m-2} + \ldots + \mathrm{V}).$$

Théorème I. — *La racine carrée d'une expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ est de même forme.*

Ce qu'il s'agit de prouver, c'est qu'il existe une expression $x + y\sqrt{-1}$ qui, multipliée par elle-même de la manière convenue, donne pour partie réelle $a$ et pour partie imaginaire $b\sqrt{-1}$, quels que soient les signes de $a$ et $b$. Il faudra pour cela qu'on ait les deux équations

$$x^2 - y^2 = a,$$
$$2xy = b.$$

Leur système est équivalent au suivant :

$$y = \frac{b}{2x}, \quad x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0.$$

La dernière équation ayant son dernier terme négatif, et étant de degré pair, a une racine positive et une racine négative ; et comme elle n'a que des puissances paires de $x$, ses racines sont deux à deux égales et de signes contraires, et indépendantes du signe de $b$.

Considérant d'abord la racine positive, $y$ prendra une valeur réelle unique qui changerait de signe avec $b$, et $x + y\sqrt{-1}$ sera donc une racine carrée de $a + b\sqrt{-1}$, et $x - y\sqrt{-1}$ le serait de $a - b\sqrt{-1}$. Considérant la valeur négative, $y$ aura la même valeur au signe près que dans l'autre cas, et l'on aura une seconde racine qui sera

$$-x - y\sqrt{-1},$$

ou la première changée de signe.

Le théorème est donc démontré, et $\pm(x \pm y\sqrt{-1})$ représentent les racines de $a \pm b\sqrt{-1}$, les deux signes de $y$ étant liés à ceux de $b$.

Théorème II. — *La racine cubique de $a + b\sqrt{-1}$ est de même forme.*

Il s'agit de prouver qu'on peut trouver pour $x$ et $y$ des valeurs réelles telles, que l'on ait

$$(x + y\sqrt{-1})^3 = a + b\sqrt{-1}.$$

Cette condition conduit aux deux équations suivantes :

$$x^3 - 3xy^2 = a,$$
$$3x^2y - y^3 = b.$$

Pour avoir une équation du premier degré en $y$, on

multipliera la première par $y$ et la seconde par $3x$, puis on les retranchera, ce qui donnera

$$y(8x^3 + a) = 3bx,$$

d'où

$$y = \frac{3bx}{8x^3 + a};$$

et reportant dans la première, on obtiendra une équation du neuvième degré en $x$, réductible au troisième en prenant $x^3$ pour inconnue, et dont le dernier terme sera $-a^3$. Elle aura donc une racine réelle de même signe que $a^3$ ou que $a$, et la valeur de $y$ sera réelle et de même signe que $b$. On aura donc une racine cubique de $a + b\sqrt{-1}$, qui sera

$$x + y\sqrt{-1},$$

$x$ et $y$ étant réels. C. Q. F. D.

171. La valeur ci-dessus, qui donne $y$ et $x$, change de signe avec $b$, sans changer autrement. On aura donc une racine de $a - b\sqrt{-1}$ en prenant $x - y\sqrt{-1}$.

Mais, indépendamment de cette remarque, il est clair que le cube de $x - y\sqrt{-1}$, formé suivant les règles convenues, ne différera de celui de $x + y\sqrt{-1}$ que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$; si donc cette dernière expression élevée au cube donne $a + b\sqrt{-1}$, l'autre donnera pour cube $a - b\sqrt{-1}$.

La même observation s'applique aux racines de tout autre degré des expressions de la forme

$$a \pm b\sqrt{-1}.$$

172. Théorème III. — *Si un polynôme* P *est divisible séparément par* $(x - a)^m$ *et* $(x - b)^n$, *a et b étant réels ou imaginaires, il le sera par* $(x - a)^m (x - b)^n$.

En effet, soit Q le quotient de P par $(x-a)^m$, on aura

$$(1) \qquad P = (x-a)^m Q.$$

Or, P étant divisible par $(x-b)^n$, devient nul quand on fait $x=b$, et comme le facteur $(x-a)^m$ ne le devient pas, c'est Q qui doit le devenir : donc Q est divisible par $x-b$. Reste à savoir à quelle puissance $x-b$ est facteur dans Q. Or il est facile de voir que c'est à la même qu'il l'est dans P. Car, s'il l'était à une puissance plus élevée dans l'un que dans l'autre, en divisant les deux membres de l'identité (1) par la plus faible des deux, $x-b$ resterait facteur dans l'un des deux membres, sans l'être dans l'autre; de sorte qu'en faisant $x=b$ l'un des membres s'annulerait, et non l'autre; ce qui serait absurde.

# CHAPITRE XXI.

## NOUVELLE EXTENSION DONNÉE AUX EXPOSANTS.

173. Les exposants ont été imaginés d'abord pour exprimer le nombre de fois qu'une quantité est prise comme facteur : ils sont donc nécessairement des nombres entiers. Il résulte de cette définition des règles très-simples pour la multiplication et la division des puissances d'une même quantité, ainsi que pour l'élévation à une puissance quelconque ou l'extraction d'une racine d'une quantité déjà affectée d'un exposant.

Mais il y a une restriction à apporter à cette dernière règle. L'extraction de la racine d'une puissance d'un nombre peut s'effectuer par la division de l'exposant de cette puissance par l'indice de la racine, mais à la condition que le quotient sera entier, puisqu'un exposant doit l'être d'après sa définition. Si donc cette division n'était pas possible, on ne pourrait qu'indiquer l'opération par la notation des radicaux, et la simplification ne pourrait avoir lieu.

Ainsi $\sqrt[n]{a^m}$ pourra être représenté par $a^{\frac{m}{n}}$ quand $m$ sera divisible par $n$, mais devra conserver sa première forme si cette division n'est pas possible.

Mais tant que $m$ et $n$ resteront indéterminés, on ne saura pas si $\frac{m}{n}$ est entier, et, par conséquent, on devra s'interdire cette représentation des racines par la division des exposants. Cependant cette manière uniforme de repré-

senter ces opérations offrirait tant de commodité, qu'il est naturel de chercher à quelles conditions on pourrait se la permettre.

Or on a facilement reconnu que, si l'on convient de désigner généralement $\sqrt[n]{a^m}$ par $a^{\frac{m}{n}}$, lors même que $m$ n'est pas divisible par $n$, et qu'on traite ces exposants fractionnaires suivant les mêmes règles que les exposants entiers, pour les opérations analogues, le résultat ainsi obtenu sera toujours la représentation du véritable résultat, dans ce même mode de notation.

Ainsi, par exemple, si l'on a à multiplier entre elles les deux quantités représentées par $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{p}{q}}$, il est facile de démontrer qu'en faisant la somme des exposants $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, ce qui donne $\frac{mq+np}{nq}$, et prenant cette fraction pour exposant de $a$, l'expression ainsi obtenue,

$$a^{\frac{mq+np}{nq}},$$

sera la représentation du véritable produit dans le même système de notation.

En effet, $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{\frac{p}{q}}$ représentent $\sqrt[n]{a^m}$ et $\sqrt[q]{a^p}$.

Or les règles pour le calcul des radicaux donneront, pour le produit de ces deux dernières quantités,

$$\sqrt[nq]{a^{mq+np}},$$

dont $a^{\frac{mq+np}{nq}}$ est bien la représentation d'après la notation convenue.

On démontrera de même que, pour effectuer la division de deux radicaux représentés par des puissances fraction-

naires d'une même lettre, il suffira de soustraire l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende, pour avoir la représentation du quotient des deux radicaux.

En effet, en considérant encore les deux radicaux $\sqrt[n]{a^m}$ et $\sqrt[q]{a^p}$, dont l'expression au moyen des exposants fractionnaires est

$$a^{\frac{m}{n}} \quad \text{et} \quad a^{\frac{p}{q}},$$

la soustraction des exposants conduit à

$$a^{\frac{mq-np}{nq}};$$

et l'exposant sera positif ou négatif, suivant que $\frac{m}{n}$ sera plus grand ou plus petit que $\frac{p}{q}$.

Or les radicaux proposés, réduits au même indice, donnent pour quotient

$$\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}},$$

et, en effectuant la division indiquée, en soustrayant l'exposant du diviseur, et admettant les exposants négatifs dans le sens convenu précédemment, le quotient deviendra

$$\sqrt[nq]{a^{mq-np}}.$$

Or l'expression trouvée par la soustraction des exposants fractionnaires est précisément la représentation de ce résultat, en entendant que l'exposant fractionnaire indique la racine, de degré marqué par le dénominateur, de la puissance dont le degré est marqué par le numérateur, qui peut être négatif, et entendu alors comme nous l'avons dit précédemment.

Il est inutile que nous considérions le cas de l'élévation de $a^{\frac{m}{n}}$ à une puissance quelconque entière ou fractionnaire, positive ou négative, $\frac{m}{n}$ pouvant lui-même être positif ou négatif. Il suffira toujours de chercher le véritable résultat des opérations ainsi indiquées, et, d'une autre part, d'effectuer sur ces exposants les mêmes opérations que l'on ferait s'ils étaient entiers et positifs : on reconnaîtra immédiatement que l'expression trouvée par ce dernier procédé est la représentation exacte du premier résultat, dans le système de notation convenu, des exposants fractionnaires, positifs et négatifs.

Au moyen de cette nouvelle extension de la définition des exposants, on fera rentrer un plus grand nombre de formules en une seule; et l'on pourra envisager sous un même point de vue général des choses qui seraient restées séparées, malgré l'analogie qu'elles avaient entre elles. Or la science est d'autant plus parfaite, que l'on peut renfermer plus de choses sous une même dénomination, soumises à un même procédé général, pour l'exécution d'opérations définies de la même manière par une extension analogue.

# CHAPITRE XXII.

## VARIABLES. — FONCTIONS. — CONTINUITÉ.

174. On appelle *variable* une quantité qui, non-seulement peut prendre des valeurs quelconques, comme on le suppose dans les formules générales, mais qui, par la nature même de la question, est considérée comme devant prendre successivement des valeurs différentes, tandis que d'autres quantités, quoique représentées par des signes généraux, sont considérées comme *constantes*.

On appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités toute autre quantité qui en dépend d'une manière quelconque, et varierait en même temps qu'elles.

Ainsi $x^3 - 5x + 2$ est une fonction de $x$; $\frac{a^2 - ab}{b - c}$ est une fonction de $a, b, c$; $3^x$ est une fonction de $x$; $a^x$ est une fonction de $x$ et de $a$.

Mais lorsque, dans une question, certaines lettres désignent des constantes, et certaines autres des variables, et qu'une quantité renferme les unes et les autres dans son expression, on dit ordinairement qu'elle est fonction de ces dernières, parce qu'on la considère alors uniquement sous le rapport de sa propre variation.

### CONTINUITÉ.

175. On dit qu'une quantité varie d'une manière *continue* lorsqu'elle ne passe d'une quelconque de ses valeurs à une autre quelconque qu'en passant par toutes les valeurs intermédiaires.

Une quantité qui dépend d'une variable est dite *fonction continue de cette variable,* lorsque, cette dernière passant successivement d'une valeur à une autre d'une manière continue, la fonction prend des valeurs réelles correspondantes, qui varient elles-mêmes d'une manière continue. Il arrive souvent que cette condition ne soit remplie qu'entre certaines limites de la variable dont elle dépend, et qui s'appelle *variable indépendante,* parce que ses valeurs sont choisies arbitrairement.

Sous cette dénomination de *valeurs*, nous comprenons les quantités négatives aussi bien que les positives, et nous entendons que les opérations s'effectuent suivant les règles des signes démontrées dans le cas des polynômes, et que l'ordre de grandeur de ces valeurs soit réglé comme il a été dit dans le Chapitre XIX.

Ainsi nous dirons qu'une variable est continue entre les valeurs $-4$ et $-7$, lorsqu'elle ne passe de l'une à l'autre qu'en passant par toute valeur négative dont le nombre absolu est compris entre 4 et 7. Et si les valeurs limites que l'on désigne étaient de signes contraires, comme par exemple $+3$ et $-5$, nous appellerons *continue* entre ces limites une variable qui ne passera de l'une à l'autre qu'en passant par toutes les valeurs que nous appelons *intermédiaires,* d'après les explications données Chap. XIX; et ces valeurs sont tous les nombres positifs compris entre 3 et zéro, le nombre zéro lui-même, et tous les nombres négatifs de zéro à $-5$. C'est là ce que nous entendrons toujours par *continuité;* et c'est là ce qu'il faudra établir pour que la continuité soit démontrée.

176. Pour démontrer qu'une fonction qui, entre certaines limites de la variable, prend des valeurs réelles correspondant à chacune de celles de cette variable, est continue, il suffit de faire voir que l'on peut faire croître

cette dernière par degrés assez petits pour que les changements correspondants de la fonction soient moindres qu'une grandeur désignée quelconque.

En effet, supposons d'abord que toutes ces valeurs soient de même signe; si cette fonction, dont on peut considérer les valeurs absolues seulement, n'était pas continue, il faudrait qu'elle passât brusquement d'une certaine valeur à une autre, qui en différerait d'une quantité finie; ce qui est absurde, puisque la variation de la fonction peut être rendue moindre que toute grandeur donnée. Donc, sous la condition admise, la fonction ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toute valeur intermédiaire; elle est donc continue, soit que toutes ses valeurs soient positives, soit que toutes soient négatives.

177. Si la fonction passe du positif au négatif, et qu'il soit démontré qu'à partir de toute valeur de la variable entre les deux limites les accroissements de la fonction puissent devenir moindres que toute grandeur donnée, il est facile de démontrer qu'elle passera par toutes les valeurs intermédiaires entre deux quelconques de celles qu'elle peut prendre, les intermédiaires étant entendues comme nous l'avons expliqué, et zéro étant regardé comme compris entre deux nombres quelconques de signes contraires. Soient, en effet, $+A$ et $-B$ deux des valeurs de la fonction $F(x)$; prenons une quantité constante M plus grande que la plus grande valeur absolue des résultats négatifs que donne $F(x)$ pour toutes les valeurs de $x$; les accroissements de la fonction $M+F(x)$ pourront, d'après l'hypothèse, avoir des valeurs moindres que toute quantité donnée, et, par conséquent, cette fonction toujours positive sera continue entre les mêmes limites, c'est-à-dire qu'elle passera par toutes les valeurs intermédiaires entre les deux extrêmes $M+A$ et $M-B$. Elle passera donc

par la valeur M qui est comprise entre elles. Mais quand $M + F(x)$ sera réduit à M, $F(x)$ sera zéro ; donc la fonction $F(x)$ ne peut passer d'une valeur à une autre de signe contraire sans passer par zéro.

Maintenant, en partant de la valeur de $x$ qui rend la fonction nulle, et considérant les valeurs toujours positives que celle-ci prend d'un côté, puis les valeurs toujours négatives qu'elle prend de l'autre, on rentre dans le premier cas, où nous avons démontré la continuité. D'où se tire donc la conséquence générale suivante :

Si, à partir de toute valeur de $x$ comprise entre deux limites déterminées, on peut donner à $x$ un accroissement assez petit pour que la fonction prenne un accroissement moindre qu'une quantité désignée quelconque, cette fonction sera continue dans cet intervalle, c'est-à-dire qu'elle passera par toute valeur intermédiaire entre deux quelconques de celles qu'elle prendra, en entendant que les quantités négatives sont plus petites que zéro, et d'autant moindres que leur valeur absolue est plus grande.

Réciproquement, toute fonction continue jouit de la propriété que ses variations peuvent devenir moindres que toute quantité donnée, pourvu qu'on rende suffisamment petites celles de la variable dont elle dépend ; car si la variation de cette dernière, à partir d'une de ses valeurs, tendait vers zéro sans qu'il en fût de même de la variation de la fonction, il en résulterait que celle-ci passerait brusquement d'une valeur à une autre qui en différerait d'une quantité finie, et que, par conséquent, elle ne serait pas continue, comme on le suppose.

Donnons quelques applications simples de cette méthode pour reconnaître la continuité des fonctions.

178. *Premier exemple.* — Considérons d'abord la fonction $ax^m$ de la variable $x$, $a$ et $m$ étant des quantités

arbitraires constantes, dont la seconde est un nombre entier.

Si, à partir d'une valeur quelconque $x$, la variable augmente de $h$, $ax^m$ augmentera de

$$a\left[mx^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2+\ldots+h^m\right]$$

Or chacun des termes de ce polynôme peut devenir moindre qu'une quantité quelconque $\delta$. En effet, prenant le terme général et exprimant qu'il est moindre que $\delta$, on aura l'inégalité

$$\frac{am(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^{m-n}h^n<\delta;$$

d'où l'on tire

$$h^n<\frac{1.2\ldots n\delta}{am(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}};$$

il suffira donc de prendre $h$ plus petit que la racine $n^{\text{ième}}$ du second membre de cette inégalité.

On peut donc prendre pour $h$ une valeur assez petite pour que chacun des termes de l'accroissement de $ax^m$ soit au-dessous de $\delta$, et que, par conséquent, l'accroissement lui-même, qui se compose de $m$ termes, soit au-dessous de $m\delta$.

Or $m\delta$ sera au-dessous d'une quantité désignée $\varepsilon$, quelque petite qu'elle soit, si l'on prend $\delta<\frac{\varepsilon}{m}$; donc l'accroissement de $ax^m$, correspondant à l'accroissement $h$ donné à $x$, peut devenir plus petit que toute quantité désignée, en prenant $h$ suffisamment petit, et, par conséquent, $ax^m$ est une fonction continue de $x$.

179. *Deuxième exemple.* — Considérons maintenant

un polynôme de degré quelconque en $x$,

$$ax^m + bx^{m-1} + \ldots + sx^2 + tx + u.$$

Il vient d'être démontré qu'on peut donner à $x$ un accroissement assez petit pour que chacun de ses termes croisse d'une quantité moindre que toute quantité donnée ; il en sera donc de même de l'accroissement total de la somme des $m$ termes variables ; et, par conséquent, tout polynôme dont les termes ne renferment que des puissances entières et positives de $x$ est une fonction continue de cette variable.

*Remarque.* — Nous avons désigné par $x$ une quantité qui variait d'une manière continue ; mais elle peut être elle-même une fonction d'une autre variable ; nous n'avons pas supposé autre chose que la continuité de la variable $x$, sans nous occuper de savoir si elle était dépendante ou indépendante.

180. *Troisième exemple.* — Démontrons maintenant la continuité de la racine de degré quelconque $n$ d'une fonction continue de $x$, désignée par X.

Soit $h$ l'accroissement que prend X lorsqu'on donne à $x$ un accroissement arbitraire ; d'après l'hypothèse, $h$ pourra être supposé aussi petit qu'on voudra.

Soit $k$ l'accroissement correspondant de $\sqrt[n]{X}$ ; on aura

$$\sqrt[n]{X+h} = \sqrt[n]{X} + k,$$

et il s'agit de démontrer que l'on pourra prendre $h$ assez petit pour que $k$ soit moindre que toute grandeur désignée.

Or, pour que cela ne fût pas, il faudrait admettre que, quelque petit que fût $h$, $k$ serait toujours supérieur à une certaine quantité fixe $\varepsilon$ : et alors on aurait toujours

$$\sqrt[n]{X+h} > \sqrt[n]{X} + \varepsilon,$$

ou, en élevant les deux membres à la puissance $n$,

$$X + h > (\sqrt[n]{X} + \varepsilon)^n,$$

inégalité impossible, puisqu'elle doit avoir lieu quelque petit que soit $h$, et que le premier membre s'approche autant qu'on voudra de X, tandis que le second, qui devrait être plus petit, est un nombre constant plus grand que X.

Donc $k$ peut devenir moindre que tout nombre désigné, et, par conséquent, $\sqrt[n]{X}$ est une fonction continue de $x$.

X désignant une fonction continue quelconque de $x$ peut être un polynôme

$$ax + bx^{m-1} + \ldots + tx + u,$$

ou même ce polynôme élevé à une puissance entière quelconque $p$; et l'on peut dire par conséquent, d'après ce qui vient d'être démontré, que

$$(ax^m + bx^{m-1} + \ldots + tx + u)^{\frac{n}{p}}$$

est une fonction continue de $x$.

181. *Quatrième exemple.* — Faisons maintenant l'application du même procédé à la fonction qui exprime le quotient de deux fonctions continues de $x$, que nous désignerons par X, Y.

La définition de la continuité exigeant que pour chaque valeur de la variable la fonction ait une valeur réelle déterminée, si nous considérons l'expression $\frac{X}{Y}$, il ne faudra prendre $x$ que dans un intervalle où aucune de ses valeurs ne rendra nul le dénominateur Y; car alors l'opération indiquée par $\frac{X}{Y}$ n'aurait aucun sens par elle-même. On dit cependant quelquefois que la valeur de $x$ qui rend Y nul

donne une valeur infinie pour $\frac{X}{Y}$, voulant exprimer par là que cette fraction croît sans limite à mesure que $x$ s'approche de cette valeur particulière; mais il vaut mieux employer ce langage, qui fait connaître la chose telle qu'elle est, plutôt qu'un autre plus rapide, qui fait croire qu'il y a une valeur pour le quotient d'un nombre par zéro, en ajoutant, ce qui est aussi inintelligible, que ce quotient est infini. Nous admettrons donc que l'on considère seulement la variable $x$ entre deux limites telles, qu'aucune valeur comprise entre elles ne rend Y nul.

Cela posé, si à partir d'une quelconque de ces valeurs on augmente $x$ d'une quantité qui pourra être aussi petite que l'on voudra, X et Y varieront de quantités $h$, $k$ qui, d'après l'hypothèse, pourront elles-mêmes devenir moindres que toute quantité donnée. La fraction qui était $\frac{X}{Y}$ deviendra

$$\frac{X+h}{Y+k};$$

et, si l'on en retranche $\frac{X}{Y}$, on aura pour l'expression de son accroissement

$$\frac{Yh-Xk}{Y(Y+k)}.$$

Or le numérateur de cette fraction peut devenir moindre que toute quantité désignée, et le dénominateur est aussi voisin qu'on voudra de $Y^2$. Si ce dénominateur était constant, il serait évident, par des raisonnements semblables à ceux que nous avons déjà faits, que la fraction peut devenir au-dessous de toute valeur désignée. Mais on remarquera que, si $k$ est positif, le dénominateur est plus grand que le nombre constant $Y^2$, et que par conséquent la fraction est plus petite encore que dans ce cas où il serait admis qu'elle

peut devenir moindre que toute quantité donnée. Et si $k$ est négatif, et qu'on désigne par $\varepsilon$ un nombre fixe, aussi petit qu'on voudra, $k$ finira par être inférieur à $\varepsilon$ en valeur absolue, de sorte que $Y + k$ sera supérieur à $Y - \varepsilon$. Or, le dénominateur étant plus grand que le nombre fixe $Y(Y - \varepsilon)$, la fraction en question est au-dessous d'une fraction qui a un dénominateur fini constant, et un numérateur qui peut devenir moindre que toute quantité donnée : il en est donc de même de la fraction qui est la différence de $\frac{X}{Y}$ à la valeur qu'elle prend quand $x$ prend un accroissement suffisamment petit. Donc enfin $\frac{X}{Y}$ est une fonction continue de $x$, entre deux limites quelconques qui ne renferment aucune valeur de $x$ qui rende Y nul.

182. *Cinquième exemple.* — Considérons, pour terminer, la fonction exponentielle $a^x$, dans laquelle $a$ est une constante quelconque, et $x$ une variable continue.

Si, à partir d'une valeur quelconque, $x$ augmente d'une quantité $h$, l'exponentielle augmentera de $a^{x+h} - a^x$ ou $a^x(a^h - 1)$, et, pour que la continuité de $a^x$ soit démontrée, il faut prouver qu'on peut donner à $h$ une valeur assez petite pour que $a^h - 1$ soit inférieure à toute quantité désignée; car il en résultera que l'accroissement $a^x(a^h - 1)$ pourra lui-même devenir moindre que toute quantité donnée.

Or, si $a^h - 1$ ne peut pas devenir au-dessous de tout nombre donné, il sera toujours supérieur à une certaine valeur fixe, que nous désignerons par $\varepsilon$, et par conséquent on aura, quelque petit que soit $h$,

$$a^h > 1 + \varepsilon.$$

La quantité $h$, qui peut diminuer indéfiniment, peut être

représentée par $\frac{1}{m}$, $m$ croissant indéfiniment; et l'inégalité précédente s'écrira ainsi

$$a^{\frac{1}{m}} > 1 + \varepsilon,$$

et devra avoir lieu quelque grand que soit $m$.

En élevant les deux membres à la puissance $m$, on devrait avoir

$$a > (1 + \varepsilon)^m,$$

quelque grand que fût $m$.

Mais on sait au contraire qu'un nombre fixe plus grand que 1, étant élevé à des puissances de degré indéfiniment croissant, le résultat peut devenir supérieur à tout nombre donné; donc $(1 + \varepsilon)^m$ ne peut rester inférieur à $a$, quelque grand que soit $m$. Donc enfin la différence $a^h - 1$ peut devenir moindre que toute grandeur donnée, en prenant pour $h$ une valeur suffisamment petite, et, par conséquent, la fonction $a^x$ est continue.

*Remarque.* — On fait souvent application de la proposition que nous venons d'établir dans le courant de cette démonstration, que, quand $h$ tend vers la limite zéro, l'exponentielle $a^h$ tend vers la limite 1.

183. Nous avons admis qu'un nombre constant, supérieur à l'unité d'une quantité fixe $\varepsilon$, aussi petite qu'on voudra la supposer, étant multiplié par lui-même un assez grand nombre de fois, peut donner un produit supérieur à tout nombre donné, quelque grand qu'il soit. On peut donner de cette proposition une démonstration si simple, que nous ne croyons pas devoir l'omettre ici.

Il est d'abord évident que ces produits vont toujours en augmentant, puisqu'on passe de l'un quelconque au suivant en le multipliant par un nombre plus grand que l'unité. Et

ce dernier surpassant le précédent du produit de celui-ci par le nombre constant $\varepsilon$, il s'ensuit que la différence d'un produit au suivant va toujours en croissant. Or, quand même elle serait constante, et aussi petite qu'on voudrait la supposer, en l'ajoutant toujours à elle-même, elle pourrait dépasser toute grandeur : donc les puissances de degré entier de $1 + \varepsilon$ peuvent dépasser tous les nombres. Et il en est de même si le degré est composé d'un nombre entier plus une fraction, puisqu'en se bornant au plus grand entier qu'il renferme la puissance pourrait devenir plus grande que tout nombre donné, et que l'addition de la fraction à l'exposant augmente encore le produit.

### CONSÉQUENCES IMPORTANTES DE LA CONTINUITÉ DES POLYNÔMES.

184. Théorème I. — *Si deux nombres $p$, $q$, substitués à $x$ dans une fonction continue qui est le premier membre d'une équation, donnent des résultats de signes contraires, il y a entre eux une racine de cette équation.*

En effet, puisque le premier membre est une fonction continue de $x$, si l'on fait passer $x$ de la valeur $p$ à la valeur $q$ d'une manière continue, quels que soient les signes de $p$ et $q$, le premier membre de l'équation passera d'une manière continue d'une valeur à une autre de signe contraire, et par conséquent il passera par la valeur intermédiaire zéro. La valeur de $x$ pour laquelle il deviendra nul sera racine de l'équation proposée, dont nous supposons toujours le second membre égal à zéro ; et, par conséquent, celle-ci aura une racine réelle comprise entre $p$ et $q$.

185. *Lemme.* — Si l'on considère un monôme $Ax^m$ et un polynôme de degré inférieur $ax^{m-n} + bx^{m-n-p} + \ldots$ dont tous les termes sont pris avec le signe $+$ : 1° il existe

une certaine valeur positive telle, que si l'on fait croître $x$ indéfiniment à partir de cette valeur, le monôme sera constamment plus grand que le polynôme; 2° leur différence ira toujours en croissant et dépassera toute grandeur désignée.

1° Posons l'inégalité

$$(1) \qquad Ax^m > ax^{m-n} + bx^{m-n-p} + \ldots.$$

Si l'on divise les deux membres par $x^{m-n}$, on en aura une nouvelle

$$(2) \qquad Ax^n > a + \frac{b}{x^p} + \ldots,$$

et si l'une quelconque des deux est satisfaite par une valeur donnée à $x$, l'autre le sera.

Si l'on fait croître $x$ indéfiniment, le premier membre croîtra sans limite, et le second tendra vers la limite $a$. Le premier membre deviendra donc nécessairement plus grand que le second. Or, si cette condition est remplie pour une certaine valeur $l$ de $x$, elle le sera à plus forte raison pour toute valeur plus grande, puisque, le premier membre de (2) croissant avec $x$, tandis que le second décroît, l'excès du premier sur le second va en augmentant. La première partie de la proposition est donc démontrée.

2° Si l'on prend la différence du monôme au polynôme, qui est

$$(3) \qquad Ax^m - (ax^{m-n} + bx^{m-n-p} + \ldots),$$

ou

$$(4) \qquad x^{m-n}\left[Ax^n - \left(a + \frac{b}{x^p} + \ldots\right)\right],$$

le facteur $x^{m-n}$ croît constamment et sans limite avec $x$, et nous venons de démontrer que l'excès de $Ax^n$ sur

$\left(a + \frac{b}{x^p} + \ldots\right)$ va aussi constamment en croissant; donc le produit (4) et, par conséquent, son égal (3) croissent constamment avec $x$, et peuvent dépasser toute grandeur désignée.

*Remarque.* — Si le polynôme renfermait des termes négatifs, l'expression (3) devrait être augmentée de tous ces termes pris avec le signe $+$; et, comme ils vont en augmentant indéfiniment avec $x$, on peut dire à plus forte raison que la différence du monôme au polynôme croît constamment à partir d'une certaine valeur de $x$, et qu'elle peut dépasser toute grandeur désignée.

186. Si, au lieu de supposer que tous les termes du polynôme sont positifs et de degrés moindres que le monôme, on les supposait tous de degrés plus élevés, l'inégalité

$$(5) \qquad Ax^m > ax^{m+n} + bx^{m+n+p} + \ldots$$

aurait lieu pour toutes les valeurs de $x$ décroissant depuis une certaine valeur jusqu'à zéro.

En effet, cette inégalité entraîne comme conséquence la suivante, qui l'entraîne réciproquement :

$$(6) \qquad A > ax^n + bx^{n+p} + \ldots.$$

Or, quand $x$ tend vers zéro, le second membre de cette dernière tend vers la limite zéro, et, par conséquent, deviendra plus petit que A. Et à partir de toute valeur de $x$ satisfaisant à (6), jusqu'à zéro, le second membre diminuant constamment, l'inégalité (6) sera toujours satisfaite et, par suite, l'inégalité (5). Si le polynôme renfermait des termes négatifs, l'inégalité (5), démontrée sans en tenir compte, aurait lieu à plus forte raison.

On peut donc énoncer cette proposition, dont les applications sont très-fréquentes et d'une grande importance :

Étant donnés un monôme $Ax^m$ et un polynôme dont

tous les termes sont de degré supérieur à $m$, il existe une valeur déterminée de $x$ telle, que toutes celles qui sont comprises entre elle et zéro rendent le monôme plus grand que le polynôme.

187. Théorème II. — *Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle, de signe contraire à son dernier terme.*

Nous entendons toujours qu'on a fait passer tous les termes de l'équation dans un même membre, de manière que le premier terme soit positif.

Cela posé, supposons d'abord le dernier terme négatif, et substituons successivement à $x$ zéro et un nombre positif qui rende le premier terme plus grand que la somme des termes négatifs, le premier membre sera négatif dans le premier cas, et positif dans le second. Donc, entre zéro et ce nombre, il y a une certaine valeur qui rend le premier membre nul; l'équation a donc une racine réelle positive.

Si le dernier terme est positif, la substitution de zéro à $x$ donnera un résultat positif; et l'on aura un résultat négatif en substituant à $x$ un nombre négatif qui rende le premier terme plus grand en valeur absolue que tous les autres ajoutés en les prenant avec le même signe. Donc, entre zéro et ce nombre, il y aura une valeur de $x$ qui rendra le premier membre nul; et l'équation aura une racine négative.

Le théorème énoncé est donc démontré.

188. Théorème III. — *Toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.*

En effet, si l'on substitue zéro à $x$, on trouvera un résultat négatif; si l'on substitue, tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, un nombre qui rende le premier terme plus grand que la somme des valeurs absolues de tous les

autres, les résultats auront le même signe que le premier terme et seront par conséquent positifs. Il y aura donc une racine réelle comprise entre zéro et le nombre substitué, et une autre entre zéro et ce nombre pris négativement.

L'équation a donc deux racines réelles de signes différents, comme nous l'avions énoncé.

Le seul cas où l'on ne puisse pas affirmer qu'une équation ait une racine réelle est donc celui où son degré est pair et son dernier terme positif.

# CHAPITRE XXIII.

## TRANSFORMATION PROPRE A SIMPLIFIER LES CALCULS NUMÉRIQUES.

189. Nous avons démontré que pour multiplier entre elles les puissances positives ou négatives, entières ou fractionnaires d'un même nombre, il suffisait de donner à ce nombre un exposant égal à la somme des exposants de tous les facteurs, en effectuant cette opération suivant les règles ordinaires des signes et des fractions. Nous avons démontré encore que, pour opérer leur division, il fallait soustraire suivant les mêmes règles l'exposant du diviseur de celui du dividende; et enfin que pour élever une puissance d'un nombre à une autre puissance positive ou négative, entière ou fractionnaire, ce qui comprend par conséquent l'extraction des racines, il fallait multiplier, en suivant la règle des signes, le degré de la puissance donnée par le degré de la puissance demandée.

Il suffit de penser à ces propositions pour être frappé de l'avantage qu'il y aurait à représenter tous les nombres par les puissances d'un même nombre, si cela était possible; car les opérations si pénibles quelquefois de la multiplication, de la division, de l'élévation aux puissances et de l'extraction des racines, se trouveraient ramenées à des opérations d'un ordre inférieur. Or il est facile de s'assurer que la chose est possible, et que pour être exécutée elle demande un travail très-pénible, il est vrai, mais qui, fait une seule fois, servira à tous les hommes et à toutes les générations de l'avenir.

En effet, nous avons démontré que $a^x$ est une fonction continue de $x$; et que, par conséquent, si $x$ varie d'une

manière continue depuis une valeur quelconque $\alpha$ jusqu'à une autre quelconque $\beta$, $a^x$ passera par toutes les valeurs comprises entre $a^\alpha$ et $a^\beta$; de sorte que, si l'on suppose $a > 1$, et qu'on fasse varier $x$ d'une manière continue depuis zéro jusqu'à des valeurs aussi grandes qu'on voudra, $a^x$ partira de l'unité et passera par tous les nombres entiers, fractionnaires ou incommensurables, depuis l'unité jusqu'à une limite aussi éloignée qu'on voudra.

Et si l'on donnait à $x$ des valeurs négatives, depuis zéro jusqu'à une limite aussi grande qu'on voudra en valeur absolue, en entendant les exposants négatifs comme nous l'avons expliqué précédemment, $a^x$ variera d'une manière continue depuis l'unité jusqu'à une valeur aussi voisine qu'on voudra de zéro.

D'où il suit que $a^x$ peut représenter tous les nombres depuis la plus petite limite jusqu'à la plus grande qu'on voudra fixer, en donnant à $x$ d'une manière continue toutes les valeurs entre deux limites suffisamment étendues, l'une positive, l'autre négative.

Si l'on avait supposé $a < 1$, on arriverait à cette même conclusion; mais les nombres plus petits que l'unité correspondraient aux valeurs positives de $x$, et les nombres plus grands aux valeurs négatives.

190. Pour la réalisation de cette conception, dont on sent toute l'utilité, on remarquera d'abord que, toutes les opérations se ramenant aux nombres entiers, il suffit de déterminer les exposants qui correspondent à ces derniers, quand on aura choisi la valeur particulière de leur base commune $a$.

Quant à ce choix, on a bientôt remarqué qu'ayant souvent besoin de multiplier ou diviser par des puissances de la base du système de numération, il serait utile que l'exposant correspondant à cette base fût le plus simple possible.

C'est pour cela que l'on a choisi pour $a$ la valeur même de la base du système de numération.

On a ainsi formé une table à deux colonnes : la première renfermant tous les nombres entiers, depuis l'unité jusqu'à une certaine limite ; et la seconde les exposants des puissances de 10 équivalentes aux nombres entiers correspondants. On a donné à ces exposants le nom de *logarithmes :* leurs valeurs ne peuvent être trouvées que par approximation, quand elles ne sont pas entières. Nous parlerons plus tard des procédés employés pour les calculer ; nous nous bornons ici à constater leur existence.

Cette table étant supposée formée, son usage se conçoit facilement. Si, par exemple, on veut trouver le quotient de la division de deux nombres considérables, on trouvera dans la colonne des logarithmes ceux qui correspondent aux deux nombres, on retranchera celui du diviseur de celui du dividende, et l'on connaîtra le logarithme du quotient. Si ce dernier se trouve dans la colonne des logarithmes, on lira dans celle des nombres le quotient cherché.

Mais on a souvent à chercher le nombre correspondant à un logarithme qui n'est pas dans la table, ou le logarithme d'un nombre qui n'y est pas compris. Les procédés qu'on emploie à cet effet sont les mêmes pour les tables de toute espèce ; ils n'offrent aucune difficulté théorique, et nous renvoyons ces détails aux Traités spéciaux.

**191.** La première conception des logarithmes était fondée sur une autre considération que celle des expressions exponentielles, mais qui y rentre au fond. En désignant par $y$ un nombre quelconque, par $x$ son logarithme et par $a$ la base, nous avions entre $x$ et $y$ la relation

$$y = a^x,$$

et l'on voit que, si l'on donne à $x$ des valeurs en progression

par différence commençant à zéro, les nombres $y$ formeront une progression géométrique commençant par l'unité. Or c'est par cette propriété que le premier inventeur, Neper, a défini les logarithmes des nombres. Il en a déduit les propriétés remarquables qui conduisent à la simplification des opérations. Nous n'insisterons pas ici sur ces détails intéressants, et nous reprendrons cette question quand nous aurons exposé les premiers principes de la théorie des séries.

# CHAPITRE XXIV.

## MÉTHODE DE TRANSFORMATION DES FONCTIONS ET DES ÉQUATIONS PAR CHANGEMENT DE VARIABLES.

192. Lorsqu'une fonction d'une certaine variable ne se prête pas facilement aux calculs qui ont pour objet la résolution d'une question, on peut se proposer de changer la forme de cette fonction; et à cet effet on la regarde comme dépendant d'une autre variable liée à la première par une relation qu'on peut se donner arbitrairement. La nature de cette relation est souvent indiquée par la question même; mais on a toujours soin d'y laisser certaines quantités indéterminées, afin que, la transformation étant opérée, on puisse profiter de cette indétermination pour simplifier le résultat.

Considérons, par exemple, une fonction $F(x)$ de la variable $x$, et regardons-la comme dépendant d'une nouvelle variable $y$, dont les valeurs sont liées respectivement à celles de $x$ par une équation que nous supposerons mise sous la forme

$$x = \varphi(y),$$

$\varphi$ désignant une forme connue de fonction. Si l'on remplace $x$ par cette valeur en $y$, $F(x)$ deviendra

$$F[\varphi(y)].$$

Et en effectuant les calculs on aura une certaine fonction de $y$ qui jouira de la propriété que, quelque valeur $a$ qu'on y mette pour $y$, le résultat sera égal à celui que donnerait $F(x)$ si l'on y mettait, pour $x$, $\varphi(a)$. C'est ce

qui est évident d'après la forme même de la fonction $F[\varphi(y)]$. On a donc ainsi deux fonctions qui donnent les mêmes résultats pour toutes les valeurs des variables dont elles dépendent, qui sont liées l'une à l'autre par une relation connue; et, par conséquent, la connaissance de l'une est ramenée à celle de l'autre, et généralement tout calcul dépendant de l'une peut être ramené à un calcul dépendant de l'autre.

193. Si, par exemple, $F(x)$ est le premier membre d'une équation dont le second est zéro, la fonction $F[\varphi(y)]$ prenant les mêmes valeurs que $F(x)$ quand les valeurs correspondantes de $x$ et $y$ satisferont à la relation

$$x = \varphi(y),$$

ces deux fonctions deviendront nulles en même temps; et, par conséquent, les racines des deux équations

$$F(x) = 0, \quad F[\varphi(y)] = 0$$

seront liées par cette même relation.

194. Appliquons ces considérations générales à quelques cas particuliers.

1° Supposons d'abord que les valeurs correspondantes de $x$ et $y$ doivent avoir une différence constante : l'équation $x = \varphi(y)$ deviendra

$$x = y + h;$$

la fonction $F(x)$ deviendra

$$F(y + h),$$

et les valeurs de ces deux fonctions seront les mêmes, pourvu que les valeurs de $x$ surpassent de $h$ les correspondantes de $y$.

Si maintenant on veut faire servir cette transformation à simplifier la fonction, on cherchera quelle valeur il faudrait donner à $h$ pour y parvenir; et si cela est possible, le changement de variable aura été avantageux.

Prenons, par exemple, pour $F(x)$ le polynôme à exposants entiers

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Tx + U;$$

posant

$$x = y + h,$$

on obtient, pour $F[\varphi(y)]$,

$$A(y+h)^m + B(y+h)^{m-1} + C(y+h)^{m-2} + \ldots + T(y+h) + U.$$

Développant les puissances du binôme $(x+h)$ d'après la formule connue, et ordonnant par rapport à $y$, ce polynôme prendra la forme

$$\begin{aligned} &Ay^m + (Amh + B)y^{m-1} \\ &\quad + \left[\frac{Am(m-1)}{2}h^2 + B(m-1)h + C\right]y^{m-2} + \ldots \\ &\quad + (Ah^m + Bh^{m-1} + \ldots + Th + U); \end{aligned}$$

et l'on remarquera qu'il est du même degré en $y$ que le proposé en $x$, que le coefficient du premier terme est le même, et que le terme indépendant de $y$ n'est autre chose que le polynôme proposé, dans lequel $x$ est remplacé par $h$, qui sera traité suivant les règles des signes s'il est négatif.

Tous les coefficients des puissances de $y$, excepté le premier, dépendant de $h$, on peut donner à cette lettre une valeur qui annule l'un quelconque d'entre eux. Celui qu'il importe ordinairement le plus de faire disparaître est celui de la puissance la plus élevée, qui est la $(m-1)^{\text{ième}}$ : et il faut pour cela poser

$$Amh + B = 0,$$

d'où

$$h = -\frac{B}{mA} \quad \text{et} \quad x = y - \frac{B}{mA}.$$

Telle est la transformation propre à faire disparaître le terme de degré $m - 1$.

Si le polynôme proposé est le premier membre d'une équation, le polynôme en $y$ sera celui d'une autre équation dont les racines seront égales à celles de la proposée, diminuées de la quantité $h$; et en prenant $h = -\frac{B}{mA}$, la nouvelle équation sera privée du second terme, ce qui est presque toujours d'une grande utilité.

195. 2° Proposons-nous maintenant que les valeurs correspondantes de $x$ et $y$ soient dans un rapport constant ou que l'on ait $x = \alpha y$, $\alpha$ étant une constante quelconque, positive ou négative, c'est-à-dire étant indépendant de $x$ et $y$. La fonction $F(x)$ sera changée en $F(\alpha y)$, et l'on entend qu'on effectuera les calculs suivant les règles ordinaires des signes, si $\alpha$ est négatif. Il est évident que, si une valeur $a$ mise pour $y$ donne un certain résultat pour $F(\alpha y)$, $\alpha a$ mis pour $x$ dans $F(x)$ donnera le même résultat, en suivant les mêmes règles des signes.

Si, par exemple, on suppose que $F(x)$ soit un polynôme de degré $m$, et doive être égalé à zéro, on aura l'équation

$$(1) \qquad Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Tx + U = 0.$$

La transformation que nous venons d'indiquer conduit à

$$(2) \qquad A\alpha^m y^m + B\alpha^{m-1} y^{m-1} + \ldots + T\alpha y + U = 0,$$

où les puissances de $\alpha$ doivent être formées en suivant les règles ordinaires des signes, et, à cette condition, les racines de cette équation multipliées par $\alpha$ et traitées suivant ces

mêmes règles seront les racines de la proposée. Si $\alpha = -1$, les racines de l'équation en $y$ seront celles de l'équation en $x$, changées respectivement de signes ; et l'on voit que l'équation en $y$ ne diffère de celle en $x$ que par le changement de signe des termes de degré impair, et la substitution de la lettre $y$ à $x$. Il n'y aurait au reste aucun inconvénient à conserver la lettre $x$ au lieu de $y$ ; le changement de signe des termes de degré impair produirait toujours le changement de signe de toutes les racines, et le changement de signe des termes de degré pair produirait le même effet, car c'est à cette forme qu'on parviendra en changeant d'abord le signe des termes de degré impair, et ensuite de tous les termes.

*Remarque.* — Les deux transformations que nous venons de faire successivement pourraient être faites à la fois ; car poser d'abord $x = z + h$ pour avoir une équation en $z$, puis poser $z = \alpha y$, revient à poser $x = \alpha y + h$ ; et cette remarque s'applique également au cas d'une fonction variable, non égale à zéro.

196. La dernière transformation que nous venons de faire sur une équation dont le premier membre est un polynôme entier et rationnel en $x$ peut servir à ramener la résolution de toute équation de cette forme à celle d'une autre dont tous les coefficients soient entiers, et celui du premier terme égal à l'unité. Or cette dernière forme est très-avantageuse dans la recherche des racines.

Pour opérer cette réduction, nous supposerons d'abord que les coefficients de l'équation (1) soient tous entiers, ce qui a pu être obtenu immédiatement par la multiplication de tous les termes.

Ayant obtenu l'équation (2), on aperçoit de suite que, si l'on prenait $\alpha = \frac{1}{A}$, le facteur A du premier terme serait

détruit, et il resterait pour dénominateur $A^{m-1}$; et, comme les autres termes auront pour dénominateurs les puissances décroissantes de A depuis la $(m-1)^{\text{ième}}$, si l'on multiplie tous les termes par $A^{m-1}$, les coefficients seront tous entiers, et celui du premier terme sera l'unité. On résout donc la question proposée en posant $x = \frac{y}{A}$.

197. 3° Proposons-nous, pour dernier exemple, de transformer $F(x)$ en une autre $F(y)$ telle, que les valeurs de $x$ et $y$ qui donneront des résultats égaux soient les puissances d'un degré donné l'une de l'autre, ce degré étant exprimé par un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

Il suffira pour cela de poser $x = y^n$, $n$ désignant un nombre quelconque positif ou négatif, en l'entendant toujours comme il a été dit précédemment. La fonction de $y$ sera alors $F(y^n)$; et s'il s'agit d'une équation, par exemple de l'équation (1), la transformée sera

$$Ay^{mn} + By^{mn-n} + \ldots + Ty^n + U = 0,$$

et ses racines seront les puissances $\frac{1}{n}$ de celles de l'équation (1).

Si, par exemple, on suppose $n = -1$, on aura

$$x = \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{x},$$

et l'équation en $y$ sera

$$Ay^{-m} + By^{-m+1} + \ldots + Ty^{-1} + U = 0,$$

ou, en multipliant par $y^m$,

$$Uy^m + Ty^{m-1} + \ldots + By + A = 0.$$

Cette équation et la proposée (1) ont leurs racines respectivement réciproques les unes des autres.

198. *Remarque générale sur cette méthode.* — Transformer une fonction ou une équation, c'est la ramener à une autre ; c'est donc suivre la marche analytique. Le mode de transformation est arbitraire, et il est possible que celui qu'on a choisi ne conduise pas à des questions plus faciles à traiter que la première ; quand on a reconnu qu'il en est ainsi, on l'abandonne et l'on en essaye un autre. Dans tous les cas, après avoir adopté un mode quelconque, on en développe les conséquences, et l'on tâche de parvenir à des questions qu'on sache résoudre, et d'où l'on déduira la solution de la proposée, en tenant compte autant que possible des solutions étrangères ou des solutions perdues.

La méthode suivie est donc encore ici l'analyse, telle que nous l'avons exposée au commencement de cet Ouvrage, mais non l'analyse de ceux qui la font consister dans une décomposition.

# CHAPITRE XXV.

## MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

199. Lorsqu'on connaît la forme d'une fonction de $x$, et qu'il n'y a d'inconnu que certaines constantes qu'elle renferme, on cherche par les moyens ordinaires les équations qui résultent des conditions de la question, et, lorsqu'on en a tiré les valeurs des inconnues, la fonction est complétement déterminée.

Dans beaucoup de questions ces constantes inconnues sont les coefficients des différentes puissances de polynômes, et dans ce cas on les appelle ordinairement des *coefficients indéterminés*. Les signes seront toujours entendus comme précédemment pour la généralité des résultats ; nous nous dispenserons dorénavant d'en prévenir.

200. Pour en donner un premier exemple, supposons qu'on veuille trouver le quotient de deux polynômes et le reste de la division. Soient ces deux polynômes :

$$(1) \qquad x^m + \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} + \ldots + \mathrm{T}x + \mathrm{U}$$

et

$$(2) \qquad x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q,$$

$m$ étant supposé plus grand que $n$. On demande que le quotient soit poussé jusqu'au terme indépendant de $x$, et que, par conséquent, le reste soit un polynôme de degré $n-1$.

Le quotient et le reste auront respectivement les formes

suivantes :

$$(3) \qquad x^{m-n} + \alpha x^{m-n-1} + \beta x^{m-n-2} + \ldots + \lambda x + \mu,$$

et

$$(4) \qquad Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + \ldots + Rx + S.$$

Les inconnues $\alpha$, $\beta$, ..., $\mu$, M, ..., S sont ce qu'on appelle des *coefficients indéterminés;* et pour avoir les équations qui en feront connaître la valeur, il suffit de se rappeler que, d'après la manière dont s'obtient le reste de la division, si l'on fait le produit du diviseur par le quotient, et qu'on y ajoute le reste, la somme réduite sera un polynôme identique terme pour terme au dividende. C'est donc cette identité qui est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux polynômes (3) et (4) soient l'un le quotient, l'autre le reste demandé.

Le produit des polynômes (2), (3) renfermera les coefficients $\alpha$, $\beta$, ..., $\mu$ au premier degré seulement, et, en y ajoutant le reste (4), on obtiendra un polynôme du degré $m$, dont les coefficients ne renfermeront qu'au premier degré tous les coefficients indéterminés du quotient et du reste. Égalant, comme nous avons dit qu'il fallait faire, les coefficients de ce polynôme aux correspondants du dividende (1), on aura $m$ équations du premier degré entre les $m$ inconnues $\alpha$, $\beta$, ..., $\mu$, M, N, ..., S ; c'est à la résolution de ces équations que le problème proposé se trouve ramené, et la forme de ces équations rend cette résolution extrêmement facile.

201. Si, au lieu de chercher le quotient et le reste, on avait voulu connaître les conditions pour que la division réussît exactement, le reste devant être zéro, par la réduction des termes semblables, les coefficients désignés par M, N, ..., S devraient être nuls, et le nombre des inconnues serait réduit à $m - n$. Mais comme le nombre des équations

à satisfaire est toujours $m$, il y aurait $n$ équations de condition entre les coefficients A, B, ..., U, $a$, $b$, ..., $q$; et on les obtiendrait en éliminant $\alpha$, $\beta$, ..., $\mu$ entre les $m$ équations.

Nous avons déjà traité cette question par un autre procédé dans le Chapitre XVII.

202. Descartes, à qui l'on doit la première idée de cette méthode, y a été conduit lorsque, dans la solution du problème des tangentes par le calcul, il a eu à trouver les conditions pour qu'un polynôme de degré quelconque en $x$ admette un diviseur qui soit le carré d'un binôme du premier degré. Il a remarqué qu'il fallait pour cela que ce polynôme fût le produit d'un binôme de la forme

$$x^2 - 2ax + a^2$$

par un polynôme de degré $m - 2$ de la forme

$$x^{m-2} + \alpha x^{m-3} + \beta x^{m-4} + \ldots + \lambda x + \mu,$$

$\alpha$, $\beta$, ..., $\mu$ pouvant être des quantités quelconques. Il fait alors le produit de ce dernier par $x^2 - 2ax + a^2$, et, après la réduction des termes semblables, il égale les coefficients des différentes puissances de $x$ à ceux du polynôme proposé, ce qui donne $m$ équations. Il en élimine les $m - 2$ indéterminées $\alpha$, $\beta$, ..., $\mu$, et il reste deux équations qui ne renferment plus que $a$ et les coefficients donnés. Si $a$ n'est pas fixé, on l'éliminera lui-même, et l'on aura la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients du polynôme pour qu'il ait un facteur du second degré qui soit un carré parfait. Si $a$ était un nombre donné, il y aurait deux équations de condition entre les coefficients.

Descartes a encore appliqué cette méthode à la décomposition d'un polynôme du quatrième degré en deux facteurs du second. Nous renverrons au Chapitre suivant la

solution de cette importante question, qu'il s'était proposée pour la résolution des équations du quatrième degré.

203. *Remarque.* — La méthode des coefficients indéterminés s'applique à un grand nombre de questions diverses, et nous en donnerons des exemples par la suite. Ce que nous en avons dit suffit pour que l'on comprenne bien en quoi elle consiste ; mais nous devons mettre en garde contre l'abus qu'on en peut faire et qu'on en a souvent fait. Nous avons dit généralement que, pour qu'une question fût complétement résolue, il était nécessaire de démontrer que les solutions trouvées renferment toutes celles que comporte la question, et n'en renferment pas d'étrangères ; mais on se dispense souvent de faire cette démonstration, et malheureusement elle est quelquefois bien difficile : tout ce que l'on peut dire alors, c'est qu'il ne faut pas ignorer l'imperfection de la solution, ni surtout chercher à la cacher à ceux qu'on instruit.

Dans la méthode que nous venons d'exposer, si la forme des fonctions cherchées n'était pas démontrée d'avance, et qu'on se la proposât hypothétiquement, il ne suffirait pas de déterminer les coefficients inconnus en faisant usage des conditions de la question. Cette détermination ne serait elle-même qu'hypothétique, et il n'y a aucune raison générale de croire que l'impossibilité de la forme supposée serait annoncée par des contradictions dans les équations qui donneraient les valeurs des coefficients. Il est toujours nécessaire de démontrer que les solutions trouvées satisfont bien réellement à la question proposée, et même de reconnaître si elle ne pourrait pas en comporter d'autres. Tout cela peut être pénible, mais il faut s'y résoudre, ou consentir à n'avoir résolu qu'imparfaitement la question.

# CHAPITRE XXVI.

## RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ.

204. Nous avons démontré précédemment que la résolution générale des équations du second degré à une seule inconnue pouvait être ramenée à celle d'équations du premier degré. Nous allons faire voir généralement que les équations du troisième degré peuvent toujours être ramenées à celles du second; et les équations du quatrième degré à celles du troisième et du second. Malheureusement c'est là que s'arrête la possibilité des solutions générales; et pour les équations de degré supérieur au quatrième, on ne peut donner généralement que des procédés pour la résolution de cas particuliers.

### ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ.

205. L'équation la plus générale du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Avant de résoudre cette équation générale, considérons-en le cas le plus simple, celui où elle ne renfermerait d'inconnu que le seul terme $x^3$.

Si l'on extrait la racine cubique de la valeur absolue du terme tout connu, et qu'on la désigne par $a$, l'équation pourra avoir, suivant le signe du terme connu, les

deux formes exprimées de la manière suivante :

$$x^3 \pm a^3 = 0.$$

Considérons d'abord

$$x^3 - a^3 = 0.$$

Le premier membre, étant le produit des deux facteurs

$$x - a \quad \text{et} \quad x^2 + ax + a^2,$$

peut être égalé à zéro, soit en posant

$$x - a = 0,$$

soit en posant

$$x^2 + ax + a^2 = 0.$$

La première équation donne

$$x = a,$$

la seconde donne

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{-3} = a\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right).$$

Le nombre quelconque $a^3$ a donc trois racines cubiques, l'une réelle, et qu'on sait trouver par les procédés indiqués précédemment, les deux autres imaginaires. Ces trois racines sont le produit de $a$ par les trois expressions qu'on trouverait en faisant $a^3 = 1$, c'est-à-dire par les trois racines cubiques de 1 qui sont

$$1 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Ces deux expressions imaginaires, traitées suivant les règles indiquées dans le Chapitre XX, donneront l'une et l'autre 1 pour cube.

Quant à l'équation

$$x^3 + a^3 = 0,$$

son premier membre, n'étant autre chose que le produit

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2),$$

ne peut être rendu nul qu'en posant

$$x + a = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - ax + a^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = -a \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{-3};$$

ces trois valeurs sont les produits de $a$ par les trois valeurs que l'on aurait trouvées en prenant $a^3 = 1$; ce sont donc les racines de l'équation

$$x^3 + 1 = 0,$$

ou les racines cubiques de $-1$.

Ce qui montre que tout nombre négatif $-a^3$ a trois racines cubiques, qui sont les produits de ce qu'on appelle la *racine arithmétique* de ce nombre par les racines cubiques de $-1$, qui sont

$$-1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

206. Nous venons de trouver les racines cubiques des nombres réels, positifs ou négatifs; mais il nous sera encore nécessaire tout à l'heure de connaître toutes les racines cubiques d'une expression imaginaire de la forme $a + b\sqrt{-1}$, et nous allons maintenant traiter cette question, c'est-à-dire résoudre complétement l'équation

$$x^3 = a + b\sqrt{-1},$$

pour laquelle nous avons déjà démontré l'existence d'une racine de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ (Chap. XX).

Le polynôme $x^3 - (a + b\sqrt{-1})$ sera donc divisible par $x - (\alpha + \beta\sqrt{-1})$, et le quotient renfermera $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, comme le quotient de $x^3 - a^3$ par $x - a$ renferme $a$, c'est-à-dire qu'il sera

$$(a) \qquad x^2 + (\alpha + \beta\sqrt{-1})\,x + (\alpha + \beta\sqrt{-1})^2.$$

Et, d'après tout ce qui a été dit, si on l'égale à zéro, on trouvera deux valeurs pour $x$ qui seront imaginaires, de la forme $p + q\sqrt{-1}$; le polynôme $x^3 - (a + b\sqrt{-1})$ sera alors décomposable en trois facteurs, et ne pourra être égalé à zéro que par les trois expressions qui annulent respectivement ces facteurs.

En effet, en égalant à zéro le facteur $(a)$, on trouve les deux valeurs suivantes de $x$:

$$-\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{2} \pm \left(\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{2}\right)\sqrt{-3}$$

ou

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})\left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-3}\right),$$

réductible à la forme $p + q\sqrt{-1}$.

L'expression $a + b\sqrt{-1}$ a donc trois racines imaginaires de la même forme, et elle ne peut en avoir davantage.

En prenant pour $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ l'une quelconque des trois, on peut dire que $a + b\sqrt{-1}$ a trois racines cubiques qui sont le produit d'une quelconque d'entre elles par les trois racines cubiques de l'unité.

**207.** Revenons maintenant à l'équation générale

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Par une transformation très-simple que nous avons fait

connaître dans le Chapitre XXIV, on peut la débarrasser du second terme; il suffit pour cela de poser

$$x = y - \frac{A}{3};$$

l'équation en $y$ ne renfermera que la troisième et la première puissance de $y$. Supposant donc cette simplification opérée, et employant, suivant notre habitude, la lettre $x$ pour représenter l'inconnue, le problème que nous nous proposons est de trouver toutes les solutions de l'équation suivante, où les coefficients peuvent avoir implicitement des signes quelconques, afin que les résultats puissent s'appliquer à tous les cas particuliers,

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0.$$

Nous allons chercher à ramener la détermination de $x$ à celle de deux parties, dans lesquelles nous le supposerons décomposé d'une manière indéterminée. Et nous faisons cela avec la pensée que la suite du calcul pourra nous indiquer quelque moyen de profiter de cette indétermination pour introduire quelques simplifications. On n'est pas absolument sûr que cette réduction sera avantageuse; mais elle peut être tentée, et l'on est presque toujours obligé de procéder ainsi.

Posant donc

$$x = y + z,$$

en entendant que $y$ et $z$ peuvent être quelconques, et substituant dans (1), on trouve, comme conséquence, avec réciprocité,

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y + z) + q = 0,$$

ou

$$(2) \qquad y^3 + z^3 + 3yz(y + z) + p(y + z) + q = 0.$$

Et comme les deux indéterminées $y$ et $z$ ne sont tenues de

satisfaire qu'à cette seule équation, on peut établir entre elles telle autre condition qu'on voudra. On aperçoit de suite que celle qu'il convient de choisir est la suivante :

$$(3) \qquad 3yz + p = 0 \quad \text{ou} \quad yz = -\frac{p}{3}.$$

Car l'équation (2) se réduira à

$$(4) \qquad y^3 + z^3 + q = 0,$$

qui devra être satisfaite en même temps que (3); et réciproquement, si elles le sont, (2) le sera, et par suite (1). Et, comme nous allons le voir, les deux équations (3) et (4) déterminent les valeurs de $y$ et $z$; d'où résultera, en les ajoutant, la formule générale de $x$ qui satisfait à l'équation proposée (1).

En effet, l'équation (4) fait connaître la somme des cubes de $y$ et $z$; l'équation (3), donnant le produit de $y$ et $z$, donne par suite le produit de leurs cubes : on connaîtra donc la somme et le produit de ces cubes, qui seront par conséquent les deux racines d'une équation du second degré connue; on connaîtra donc ces cubes, et, par suite, ces quantités mêmes, d'où $x$ se déduira, en les ajoutant. Reste donc à effectuer le calcul que nous venons d'indiquer. Les équations (3) et (4) donnent

$$(5) \qquad y^3 + z^3 = -q,$$

$$(6) \qquad y^3 z^3 = -\frac{p^3}{27},$$

et il est toujours entendu que nous cherchons des expressions positives ou négatives, réelles ou imaginaires, qui satisfassent aux équations, en effectuant les opérations suivant les règles tant de fois rappelées dans ce qui précède.

Mais, avant d'aller plus loin, voyons si l'équation (6), qui se déduit de (3), l'entraîne réciproquement; sans quoi

le système (5), (6) renfermerait des solutions étrangères au système (3), (4), auquel la proposée a été ramenée. Or on reconnaît immédiatement que l'équation (6) peut être satisfaite sans que (3) le soit, parce que $\frac{p^3}{27}$ a, comme toute quantité réelle ou imaginaire, trois racines cubiques différentes, qui sont, d'après ce que nous venons de voir, le produit de $\frac{p}{3}$ par les trois racines cubiques de $+1$, qui sont $1$, et $\frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$.

Si donc nous désignons ces deux dernières par $\alpha$, $\beta$, on obtiendrait la même équation (6), si au lieu de (3) on avait l'une quelconque des deux suivantes :

$$yz = -\frac{p}{3}\alpha, \quad yz = -\frac{p}{3}\beta.$$

Le système (5), (6) renferme donc, outre les solutions de la question proposée, celles de deux autres systèmes consistant en chacune de ces deux dernières équations, jointe à (5).

Résolvons donc d'abord le système (5), (6); nous verrons ensuite comment nous débarrasser des solutions étrangères.

Les deux inconnues $y^3$, $z^3$, dont nous connaissons la somme et le produit, seront les deux racines de l'équation suivante :

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0,$$

dont les valeurs sont

$$(7) \qquad -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Il ne reste donc plus qu'à extraire les racines cubiques de ces deux expressions, réelles ou imaginaires, et à les ajouter pour former la valeur de $x$. Mais pour chacune d'elles

il y a trois racines cubiques, et leurs combinaisons respectives donneraient neuf valeurs pour $y+z$. Ces neuf valeurs sont les solutions des trois systèmes renfermés dans les équations (5), (6), et il nous sera facile de séparer celles qui conviennent à la question proposée.

Pour cela, nous considérerons successivement les trois hypothèses de $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ positif, nul ou négatif.

1° Supposons

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0,$$

désignons

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \text{ par A, } \quad \text{et} \quad -\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \text{ par B.}$$

Leurs trois racines cubiques seront respectivement, en désignant par $\alpha$, $\beta$ les deux racines cubiques imaginaires de $+1$, et par $\sqrt[3]{A}$ et $\sqrt[3]{B}$ les racines arithmétiques de A et B,

$$\begin{array}{lll} \sqrt[3]{A}, & \alpha\sqrt[3]{A}, & \beta\sqrt[3]{A}, \\ \sqrt[3]{B}, & \alpha\sqrt[3]{B}, & \beta\sqrt[3]{B}. \end{array}$$

Les trois premières représenteront, par exemple, les valeurs de $y$; les trois autres celles de $z$. Mais le produit $yz$ doit être réel d'après l'équation (3), et comme $\alpha$, $\beta$, $\alpha^2$, $\beta^2$ sont imaginaires, les seules combinaisons satisfaisant à (3) et donnant les valeurs cherchées de $x$ qui satisfont à (1) seront

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}, \\ x = \alpha\sqrt[3]{A}+\beta\sqrt[3]{B}, \\ x = \beta\sqrt[3]{A}+\alpha\sqrt[3]{B}, \end{array} \right.$$

et l'on voit que la première seule est réelle.

2° Soit

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27} = 0;$$

les deux valeurs de $y^3$, $z^3$ ou de A, B sont réelles et égales. Les formules (8) se réduisent alors à

$$x = 2\sqrt[3]{A},$$
$$x = (\alpha + \beta)\sqrt[3]{A} = -\sqrt[3]{A},$$
$$x = -\sqrt[3]{A}.$$

Les trois racines de l'équation (1) sont donc réelles, et deux d'entre elles sont égales.

3° Enfin, soit

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

L'expression (7) peut se mettre sous la forme $m \pm n\sqrt{-1}$. Représentant une des racines cubiques de $m + n\sqrt{-1}$ par $h + k\sqrt{-1}$, une des racines cubiques de $m - n\sqrt{-1}$ sera $h - k\sqrt{-1}$.

Les trois valeurs de $y$ seront donc

$$h + k\sqrt{-1}, \quad \alpha(h + k\sqrt{-1}), \quad \beta(h + k\sqrt{-1}),$$

et celles de $z$ seront

$$h - k\sqrt{-1}, \quad \alpha(h - k\sqrt{-1}), \quad \beta(h - k\sqrt{-1}).$$

Maintenant, pour former les racines de (1), il faut ajouter chacune des valeurs de $y$, respectivement avec une valeur de $z$ telle, que $yz$ soit réel, comme l'exige l'équation (3). Et il est facile de voir qu'il n'y a encore que les combinaisons qui ont donné les formules (8), parce que dans le cas actuel le produit de $h + k\sqrt{-1}$ par $h - k\sqrt{-1}$,

étant $h^2+k^2$, est réel comme l'était le produit $\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}$ dans l'autre.

Les trois valeurs de $x$ sont donc, dans ce troisième cas,

$$x = 2h,$$
$$x = \alpha\left(h + k\sqrt{-1}\right) + \beta\left(h - k\sqrt{-1}\right) = -h - k\sqrt{3},$$
$$x = \beta\left(h + k\sqrt{-1}\right) + \alpha\left(h - k\sqrt{-1}\right) = -h + k\sqrt{3}.$$

Elles sont donc encore toutes les trois réelles et inégales. Mais il ne faut pas oublier que, pour obtenir la valeur de $h$, il faudra chercher la racine réelle d'une équation du troisième degré.

208. *Remarque.* — Il est bon de remarquer que c'est la méthode analytique que nous avons employée pour résoudre l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

En effet, nous avons commencé par un changement d'inconnues, et nous avons déjà dit que toute transformation était de l'analyse, puisqu'elle ramène une question à une autre. Seulement, pour que ce soit une analyse utile, il faut que la seconde question soit plus facile à traiter que la première : et c'est pour cela qu'on laisse toujours quelque chose d'indéterminé dans la relation entre les inconnues ou les variables, afin de pouvoir en profiter pour opérer quelque simplification.

### RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ.

209. Les équations du quatrième degré ont fourni à Descartes la seconde application qu'il ait faite de sa méthode des coefficients indéterminés.

Après avoir simplifié l'équation générale par la dispari-

tion du second terme, et l'avoir ainsi réduite à la forme

$$(1) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

il s'est proposé de décomposer le premier membre en deux facteurs du second degré, et de ramener par là la résolution de l'équation proposée à celle de deux équations du second degré.

Pour cela, il regarde le polynôme (1) comme le produit de deux facteurs de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} x^2 + fx + g, \\ x^2 - fx + h, \end{cases}$$

$f$, $g$, $h$ étant des coefficients indéterminés, et les seconds termes de ces deux facteurs ayant été pris de signes contraires, pour que le terme en $x^3$ de leur produit fût nul.

Ce produit

$$x^4 + (g + h - f^2)x^2 + f(h - g)x + gh$$

étant identifié au polynôme (1), il en résulte les trois équations

$$\begin{aligned} g + h - f^2 &= p, \\ f(h - g) &= q, \\ gh &= r. \end{aligned}$$

La première et la troisième donnent l'expression de la somme et du produit de $g$ et $h$ en $f$; elles sont donc les racines de l'équation

$$u^2 - (f^2 + p)u + r = 0,$$

qui ont pour valeurs

$$\frac{f^2 + p \pm \sqrt{(f^2 + p)^2 - 4r}}{2}.$$

Ce sont là les deux valeurs de $g$ et $h$. Les reportant dans la seconde équation, on obtient

$$(3) \qquad f\sqrt{(f^2+p)^2-4r}=q,$$

ou, en élevant au carré et ordonnant par rapport à $f$,

$$(4) \qquad f^6+2pf^4+(p^2-4r)f^2-q^2=0.$$

Cette équation est du troisième degré, si l'on prend pour inconnue $f^2$, et comme son dernier terme est négatif, elle a une racine réelle positive : d'où résultent pour $f$ deux valeurs réelles et de signes contraires. Prenant l'une quelconque des deux, ce qui n'influe pas sur les valeurs trouvées de $g$ et $h$, et observant que l'équation (3) donne pour le radical qui entre dans leur expression une valeur réelle $\frac{q}{f}$, il s'ensuit que les trois quantités $f$, $g$, $h$ seront réelles et que le premier membre de l'équation (1) sera décomposé en deux facteurs réels du second degré. On ne pourra donc satisfaire à cette équation qu'en égalant l'un ou l'autre à zéro, ce qui donnera quatre valeurs pour $x$, que l'on tirera des deux équations suivantes :

$$x^2+fx+g=0,$$
$$x^2-fx+h=0.$$

210. *Remarque.* — On voit que cette analyse a consisté à décomposer un polynôme du quatrième degré en deux facteurs du premier, et ramener ainsi la résolution de l'équation générale du quatrième degré à celle du second. Mais, pour opérer cette décomposition qui ne se fait pas d'elle-même, mais qu'on se propose comme un nouveau problème auquel on cherche à ramener le premier, on est conduit à résoudre une équation du troisième degré, c'est-à-dire à une question dont on connaît la solution.

Nous ne nous occuperons pas des détails auxquels donne lieu la discussion des formules : nous ne voulions que faire connaître l'esprit de cette belle analyse de Descartes, et nous ne parlerons pas de plusieurs autres méthodes ingénieuses pour résoudre cette même question : on les trouvera exposées dans les Traités ordinaires d'Algèbre.

# CHAPITRE XXVII.

## LES POLYNOMES DÉRIVÉS.

**211.** Lorsque nous avons parlé de la transformation des fonctions par un changement de variables, nous avons signalé en particulier celle qui provient du changement de la variable $x$ en $y+h$, ou simplement en $x+h$. Si la fonction de $x$ est le premier membre d'une équation, la nouvelle équation en $y$ ou $x$ a pour racines toutes celles de la première, diminuées de $h$.

Nous avons montré comment ce changement de variable pouvait servir à simplifier ce polynôme, soit variable, soit égalé à zéro. Cette transformation est utile dans beaucoup d'autres questions, et mérite une attention particulière.

Nous allons nous occuper du résultat de cette substitution, en nous bornant ici au cas où la fonction donnée est un polynôme entier et rationnel, et ordonnant le résultat par rapport aux puissances ascendantes de $h$.

Soit donc la fonction

$$(1) \qquad Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Sx^2 + Tx + U.$$

Pour connaître la loi des coefficients des différentes puissances de $h$, lorsqu'on remplace $x$ par $x+h$ dans ce polynôme, il suffit de l'étudier dans un terme général $Mx^n$; car le coefficient d'une puissance quelconque de $h$, provenant d'une somme de termes, est la somme de ceux qui sont fournis par ces différents termes.

Or, d'après une formule connue, on a

$$\mathrm{M}(x+h)^n = \mathrm{M}\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}x^{n-p}h^p + \ldots + h^n\right];$$

et l'on voit sans peine que l'exposant de $x$ diminue d'un terme à l'autre, depuis $n$ jusqu'à zéro, tandis que celui de $h$ augmente depuis zéro jusqu'à $n$; que le coefficient de chaque terme se forme du précédent en le multipliant par l'exposant de $x$ dans ce terme, et le divisant par le nombre des termes précédents.

Il est facile de voir d'après cela que la substitution de $x+h$ à $x$ dans le polynôme (1) donnera pour terme indépendant ce polynôme lui-même, et pour coefficients des puissances ascendantes de $h$, les polynômes suivants :

$$\mathrm{A}mx^{m-1} + \mathrm{B}(m-1)x^{m-2} + \ldots + 2\mathrm{S}x + \mathrm{T},$$
$$\mathrm{A}m(m-1)x^{m-2} + \mathrm{B}(m-1)(m-2)x^{m-3} + \ldots + 2\mathrm{S},$$
$$\mathrm{A}m(m-1)\ldots(m-p+1)x^{m-p}$$
$$+ \mathrm{B}(m-1)(m-2)\ldots(m-p)x^{m-p-1}\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{A}m(m-1)\ldots 2.1,$$

divisés, le premier par 1, le second par 1.2, le $p^{\text{ième}}$ par $1.2.3\ldots p$ et le dernier par $1.2\ldots m$.

Le premier de ces polynômes se nomme le premier polynôme dérivé du premier (1); le second est le premier polynôme dérivé de ce polynôme dérivé, en suivant la même loi que pour obtenir celui-ci d'après le proposé; on le nomme le second polynôme dérivé du proposé, et ainsi de suite jusqu'au dernier.

D'après cela, si l'on représente le polynôme (1) par $\mathrm{F}(x)$, et ses polynômes dérivés successifs, qu'on nomme aussi les

fonctions dérivées, ou simplement les dérivées de la fonction $F(x)$, par $F'(x)$, $F''(x)$, ..., $F^{(p)}(x)$, on aura la formule suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots \\ + \frac{h^n}{1.2\ldots n}F^{(n)}(x) + \ldots + h^m. \end{aligned}\right.$$

212. La première dérivée $F'(x)$ du polynôme $F(x)$, qui est le coefficient de la première puissance de $h$ dans le développement de $F(x+h)$, peut être envisagée sous un autre point de vue qui nous conduira plus tard à une définition applicable à toutes les fonctions, même à celles pour lesquelles on ne saurait effectuer le développement de $F(x+h)$, et auxquelles, par conséquent, la définition précédente des dérivées ne pourrait être appliquée.

L'équation (2) conduit facilement à la suivante :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) + \frac{h}{1.2}F''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1\ldots n}F^n(x) + \ldots + h^{m-1}.$$

Or il est évident que, si l'on fait tendre $h$ vers la limite zéro, le second membre tend vers la limite $F'(x)$ ; le premier tend donc aussi vers la limite $F'(x)$, et l'on peut dire par conséquent que :

*La première dérivée d'un polynôme est la limite du rapport de l'accroissement de ce polynôme à l'accroissement correspondant de la variable $x$, lorsque ce dernier tend vers zéro.*

Mais pour le moment nous restons dans la première définition, parce que nous ne nous proposons ici de considérer que des fonctions entières et rationnelles de $x$, d'où elle tire son origine.

## DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS DE POLYNÔMES DONNÉS.

213. Lorsqu'on veut connaître la dérivée d'une fonction qui est le résultat d'opérations effectuées sur des polynômes donnés, et conduisant à un polynôme entier et rationnel, on peut effectuer ces opérations et prendre suivant la règle indiquée la dérivée du polynôme obtenu.

Mais il est souvent utile de connaître la manière dont cette dérivée dépend des polynômes donnés ainsi que de leurs dérivées, et l'on n'y parviendrait pas ainsi. Cela peut d'ailleurs être plus simple, et c'est une question qu'il est important de résoudre.

Nous n'en considérerons que quelques cas très-simples, utiles pour la résolution numérique des équations.

214. *Dérivée d'une somme.* — Si l'on a la somme de plusieurs polynômes, pris avec des signes quelconques, et qu'on y substitue $x+h$ à $x$, le coefficient total de $h$ sera la somme de tous ceux qui proviendront respectivement de chacun de ces polynômes. D'où l'on conclut que la dérivée d'une somme de polynômes est la somme des dérivées de ces polynômes.

Il est bien entendu que le mot *somme* est pris avec toute la généralité que nous lui avons donnée précédemment.

215. *Dérivée d'un produit.* — Cherchons maintenant la dérivée du produit de plusieurs polynômes P, Q, R, . . . , dont nous représenterons les dérivées respectives des différents ordres par $P'$, $Q'$, $R'$, . . . , $P''$, $Q''$, . . . . Par la substi-

tution de $x+h$ à $x$, ces polynômes deviennent

$$P + P'h + P''\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

$$Q + Q'h + Q''\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

$$R + R'h + R''\frac{h^2}{1.2} + \ldots.$$

Si l'on fait le produit de ces développements et qu'on prenne le coefficient de la première puissance de $h$, on aura, d'après la définition, la dérivée du produit PQR...; son expression sera

$$P'QR\ldots + Q'PR\ldots + R'PQ\ldots + \ldots,$$

c'est-à-dire que :

*La dérivée d'un produit est la somme des produits de la dérivée de chaque facteur par tous les autres.*

216. Si l'on avait

$$P = Q = R\ldots,$$

le produit PQR... deviendrait $P^m$, $m$ étant le nombre des facteurs. L'expression de la dérivée du produit PQR... deviendra $mP^{m-1}P'$. Donc :

*La dérivée de la puissance $m^{ième}$ d'un polynôme* P *se forme en prenant la dérivée de* $P^m$ *par rapport à la variable* P, *qui sera* $mP^{m-1}$, *et la multipliant par la dérivée* $P'$ *de* P *par rapport à* $x$.

Si le polynôme P était un binôme du premier degré $x-a$, sa dérivée par rapport à $x$ serait 1, et par conséquent la dérivée de $(x-a)^m$ sera $m(x-a)^{m-1}$.

Si P était $\alpha x - a$, dont la dérivée est $\alpha$, la dérivée de $P^m$ ou de $(\alpha x - a)^m$ serait $m(\alpha x - a)^{m-1}\alpha$.

217. Prenons encore pour exemple le produit

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l),$$

la dérivée sera

$$(x-b)(x-c)\ldots(x-l)+(x-a)(x-c)\ldots(x-l)+\ldots,$$

ou la somme des quotients du produit proposé par chacun de ses facteurs successifs.

218. Enfin, soit le produit

$$(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots,$$

que nous désignerons par X.

Considérons les facteurs P, Q, R, ... comme étant respectivement

$$(x-a)^n,\quad (x-b)^p,\quad (x-c)^q,\quad \ldots,$$

la dérivée du produit X, ou X′, sera

$$\begin{aligned} &n(x-a)^{n-1}(x-b)^p(x-c)^q\ldots\\ &+p(x-b)^{p-1}(x-a)^n(x-c)^q\ldots\\ &+q(x-c)^{q-1}(x-a)^n(x-b)^q\ldots. \end{aligned}$$

La composition de cette dérivée donne lieu à une remarque importante. Un facteur quelconque, du premier degré, par exemple $(x-a)$, qui est facteur dans X à la puissance $n$, est facteur dans X′ à la puissance $n-1$ seulement. En effet, si l'on y met $(x-a)^{n-1}$ en facteur, l'autre facteur se composera de deux parties, l'une qui aura en facteur $x-a$ au premier degré, et l'autre qui sera

$$n(x-b)^p(x-c)^q\ldots;$$

de sorte que ce second facteur ne s'annulerait pas par l'hypothèse $x=a$, et, par conséquent, ne serait pas divisible par $(x-a)$.

La même chose pouvant se dire de tous les autres facteurs du premier degré de X, on en conclut ce théorème :

*La dérivée de* X *peut se mettre sous la forme*

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}\ldots Q,$$

Q *étant un polynôme qui n'est divisible par aucun des facteurs du premier degré,* $x-a$, $x-b$, ....

### COMMENT LES DÉRIVÉES FONT RECONNAÎTRE SI LES FONCTIONS SONT CROISSANTES OU DÉCROISSANTES.

219. Il est souvent utile de savoir reconnaître dans quel sens varie une fonction lorsque l'on augmente la variable dont elle dépend, à partir d'une valeur donnée. Or c'est à quoi l'on parvient facilement au moyen des dérivées de cette fonction, que nous supposons toujours réductible à un polynôme, quand on effectue toutes les opérations indiquées.

Soient $x$ la valeur à partir de laquelle la variable augmente d'une quantité indéterminée $h$, à laquelle on pourra supposer un signe quelconque, et $F(x)$ la fonction proposée.

Nous savons qu'on aura

$$F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots,$$

d'où

$$F(x+h)-F(x)=hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots.$$

L'accroissement de la fonction, quand la variable passe de $x$ à $x+h$, est donc représenté par un polynôme ordonné suivant les puissances ascendantes de $h$; et nous avons démontré que, depuis une certaine valeur de $h$ jusqu'à zéro, le premier terme $hF'(x)$ aurait une valeur absolue

plus grande que la somme de tous les autres, pris avec le même signe.

Il résulte de là que le second membre est une quantité de même signe que $hF'(x)$. L'accroissement de la fonction, qui est $F(x+h)-F(x)$, est donc aussi de même signe que $hF'(x)$. D'où résulte cette importante conséquence :

*Un polynôme commence par varier dans le même sens que la variable à partir d'une valeur quelconque de $x$, lorsque pour cette valeur la dérivée est positive : il varie en sens opposé si la dérivée est négative.*

220. *Remarque.* — Si, pour la valeur de $x$ que l'on considère, on avait $F'(x)=0$, le premier terme de l'expression de l'accroissement de la fonction serait

$$\frac{h^2}{1.2}F''(x);$$

donc, depuis $h=0$ jusqu'à une certaine valeur déterminée, le signe du polynôme serait le même que celui de $h^2F''(x)$, ou simplement de $F''(x)$, puisque $h^2$ est nécessairement positif. D'où se tire cette conséquence :

A partir d'une valeur de $x$ qui rend $F'(x)=0$, un changement de la variable dans un sens quelconque produit toujours un changement de même sens dans la fonction; il est de même signe que $F''(x)$.

Mais, si $F''(x)$ était nul ainsi que $F'(x)$, l'accroissement serait de même signe que $h^3F'''(x)$. La variation de la fonction changerait donc de sens en même temps que celle de la variable $x$; elle serait de même sens que celle de $x$, si $F'''(x)$ était positive, et de sens contraire si $F''(x)$ était négative. Des conséquences analogues se produiraient si la valeur de $x$ annulait un plus grand nombre de fonctions dérivées consécutives.

### DES VALEURS MAXIMUM OU MINIMUM D'UN POLYNÔME.

221. Lorsqu'une fonction de $x$ varie d'une manière continue, et que la variation de $x$ à partir d'une valeur particulière $a$, dans l'un ou l'autre sens, produit une diminution dans la valeur de la fonction, même lorsque cela n'aurait lieu qu'entre deux limites très-voisines de $a$, on dit que pour cette valeur $a$ de la variable la fonction a une valeur *maximum*.

Si, dans les mêmes circonstances, il y avait augmentation de la fonction au lieu d'une diminution, on dirait que la valeur de la fonction est *minimum*.

Il est facile, d'après ce qui précède, de ramener à la résolution d'une équation la détermination des valeurs particulières de $x$ auxquelles correspondent ces valeurs remarquables de la fonction, lorsque du moins elle est réductible à un polynôme entier et rationnel.

En effet, considérant les valeurs de $x$ entre les deux limites dont nous avons parlé, qui comprennent une valeur $a$ à laquelle correspond un maximum ou un minimum de $F(x)$, on voit qu'en faisant passer $x$ d'une manière continue de la plus petite limite à la plus grande, la fonction, dans le cas du maximum, ira en croissant jusqu'à $x = a$ et commencera ensuite immédiatement à décroître. Donc $F'(x)$ sera positif jusqu'à $x = a$, et deviendra immédiatement négatif au delà. La fonction $F'(x)$, qui est continue, passe donc par zéro entre les deux limites, et cette valeur ne peut correspondre qu'à $x = a$, puisque pour les valeurs moindres elle est positive, et négative pour les plus grandes. L'inverse aurait lieu dans le cas du minimum. D'où l'on conclut cette proposition :

*Les valeurs de $x$, qui rendent maximum ou minimum la valeur d'un polynôme, rendent nulles sa première dérivée.*

Il s'ensuit que, si l'on ne considère que des valeurs réelles pour la variable $x$, il faudra chercher les racines réelles de l'équation

$$F'(x) = 0,$$

et il ne restera plus qu'à s'assurer pour chacune d'elles si elle donne un maximum ou un minimum.

Et même il faut bien remarquer que, l'équation

$$F'(x) = 0,$$

n'étant qu'une conséquence nécessaire de la supposition que $F(x)$ est maximum ou minimum, et que nous n'avons pas démontré la réciprocité, il est possible qu'elle renferme des solutions étrangères.

Soit donc $a$ une racine réelle de cette équation, l'accroissement de la fonction aura l'expression suivante :

$$F(a+h) - F(a) = \frac{h^2}{1.2} F''(a) + \frac{h^3}{1.2.3} F'''(a) + \ldots;$$

et comme c'est à partir de $a$ qu'on doit considérer les variations de $x$, et dans un intervalle qu'on pourra supposer aussi petit qu'on voudra, c'est pour des valeurs de $h$ partant de zéro, entre deux limites de signes contraires et aussi petites qu'on voudra, qu'il faut étudier le signe de l'accroissement de $F(x)$.

Or ce signe est le même que celui de $h^2 F''(a)$ ou de $F''(a)$, quelque signe qu'ait $h$. Donc on aura un maximum si $F''(a) < 0$, et un minimum si $F''(a) > 0$.

Mais il n'y aurait ni l'un ni l'autre si l'on avait

$$F''(a) = 0,$$

et que $F'''(a)$ fût différent de zéro; car le signe du développement serait le même que celui du premier terme, ou

de $h^3 F'''(a)$, et par conséquent changerait avec le signe de $h$. La valeur de $a$ serait alors étrangère au problème proposé.

Si cependant on avait en outre

$$F'''(a) = 0,$$

le signe du polynôme serait celui de $h^4 F^{\text{IV}}(a)$; il ne dépendrait donc pas du signe de $h$, et il y aurait maximum si l'on avait $F^{\text{IV}}(a) < 0$, et minimum si $F^{\text{IV}}(a) > 0$. On continuerait semblablement s'il y avait un plus grand nombre de dérivées à s'annuler pour $x = a$.

# CHAPITRE XXVIII.

## DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

222. Le principal objet des formules générales est de dispenser de répéter dans chaque cas particulier les mêmes raisonnements et les mêmes opérations, et d'indiquer seulement celles qui sont indispensables. On conçoit cependant qu'il pourrait y avoir plusieurs formes sous lesquelles se présenterait l'expression générale d'une même chose, suivant la manière dont on aurait dirigé la recherche. Il faut dans ce cas choisir celle qui est le plus appropriée à l'objet qu'on a en vue, et qui peut n'être pas toujours le même. Et cette remarque s'applique non-seulement aux racines des équations, mais, comme on le pourra voir plus tard, aux résultats des questions d'un ordre beaucoup plus élevé.

Ainsi nous avons vu que la formule des racines de l'équation du troisième degré, dans le cas qui semblerait le plus à l'abri de toute difficulté, dans le cas où ses trois racines sont réelles, se présente sous une forme imaginaire, que l'on démontre bien être réductible à une forme réelle, mais qui ne peut l'être qu'à la condition de résoudre une autre équation du troisième degré qui présenterait des difficultés analogues. Il est vrai que ce cas, qu'on appelle *irréductible,* est susceptible de transformations qui conduisent à des formes réelles; mais c'est en introduisant des considérations géométriques, et en admettant la construction de Tables d'une très-difficile exécution.

Les équations du quatrième degré se ramenant au troisième offriraient encore plus de difficultés à la réalisation

numérique des formules générales. Et l'on ne saurait beaucoup regretter de ne pouvoir obtenir de formules pour les racines des équations de degrés supérieurs au quatrième, parce que la difficulté de les appliquer aux cas particuliers ne ferait que s'accroître de plus en plus.

En conséquence, le problème général de la résolution des équations a dû se poser de cette manière :

« Étant donnée une équation d'un degré déterminé quelconque, dont les coefficients sont des nombres donnés quelconques, trouver des procédés généraux qui conduisent à la valeur exacte, ou aussi approchée qu'on voudra, de toutes ses racines. »

Pour découvrir ces procédés applicables à tous les cas particuliers, comme on en a déjà pour l'extraction des racines de degré quelconque, qui forment les cas les plus simples, il faut établir un certain nombre de théorèmes généraux, dont quelques-uns ont été démontrés dans les Chapitres précédents.

223. La première question qu'il semble naturel de se faire, quoiqu'il ne soit pas indispensable de savoir y répondre, c'est si le problème qu'on se propose a toujours une solution : en d'autres termes, si toute équation a une racine. Cela a été démontré pour les quatre premiers degrés ; mais il en est ainsi pour les suivants, et peut-on affirmer que le problème difficile dont on se propose de trouver la solution est réellement susceptible d'en recevoir une.

Des théorèmes démontrés précédemment nous ont conduit à ces conséquences générales, que :

1° Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle, de signe contraire à son dernier terme ;

2° Toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Il ne reste donc d'incertitude que pour les cas d'une équation de degré pair dont le dernier terme est positif.

Or on est parvenu à démontrer qu'*une équation de degré quelconque, à coefficients réels ou imaginaires de la forme* $a + b\sqrt{-1}$, *peut toujours être satisfaite en substituant à l'inconnue un nombre réel, ou une expression imaginaire de cette même forme, les calculs étant toujours effectués suivant les règles convenues et rappelées tant de fois.*

224. De cette proposition, dont la démonstration n'offre aucune autre difficulté qu'un peu de complication, et que nous devons nous borner à énoncer, résulte cette conséquence :

« Toute équation de degré quelconque $m$, à coefficients réels ou imaginaires, a $m$ racines réelles ou imaginaires.

» Tout polynôme de degré $m$, à coefficients réels ou imaginaires, est décomposable, et d'une seule manière, en $m$ facteurs du premier degré ayant pour premier terme $x$, et pour second un nombre réel ou une expression imaginaire. »

En effet, toute équation de degré $m$ ayant une racine $a$ réelle ou imaginaire, son premier membre sera divisible par $x - a$, et le quotient de degré $m - 1$ aura ses coefficients réels ou imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Ce quotient égalé à zéro aura nécessairement une racine $b$ d'après le théorème général : il sera donc le produit de $x - b$ par un quotient de degré $m - 2$. En continuant ainsi, on parviendra à décomposer le premier membre en $m$ facteurs du premier degré; d'où il suivra que l'équation aura $m$ racines, réelles ou imaginaires, égales ou inégales : et nous avons démontré qu'elle ne pouvait en avoir un nombre plus grand, et que le polynôme quelconque qui forme son pre-

mier membre ne pouvait être décomposé que d'une seule manière en facteurs du premier degré.

225. Mais ces propositions ne sont pas indispensables pour procéder à la recherche des racines d'une équation quelconque, parce que les méthodes qu'on emploiera à cet effet entraîneront la démonstration quand elles réussiront; et si elles ne réussissent pas, la certitude qu'il y a une solution ne la ferait pas mieux trouver, et ne pourrait être utile qu'en donnant plus de confiance et, par suite, plus de ténacité dans la recherche.

226. Les plus grands géomètres se sont occupés de la résolution des équations numériques. Nous ne nous proposons pas ici de faire connaître avec détails les procédés qu'ils ont découverts; mais nous ne pouvons non plus nous dispenser d'en indiquer l'esprit, et d'en signaler en peu de mots les avantages et les imperfections. Nous renverrons pour les détails et les démonstrations aux Traités spéciaux et aux Mémoires originaux.

Les racines se partagent d'abord en deux classes distinctes, les réelles et les imaginaires.

Les réelles se partagent elles-mêmes en deux classes : les racines commensurables et les racines incommensurables. Quant à leurs signes, il suffit de s'occuper de celles qui sont positives, parce que les racines négatives s'y ramènent, comme nous l'avons vu, en changeant $x$ en $-x$.

227. *Racines commensurables.* — La recherche des racines commensurables n'offre aucune difficulté. Elle se ramène d'abord à celle des racines entières des équations. En effet, par une transformation qui n'a d'autre effet que de multiplier toutes les racines par un certain nombre entier, on ramène la résolution de toute équation dont les coefficients sont commensurables à celle d'une autre équa-

tion dont tous les coefficients sont entiers, et le premier égal à l'unité. Or on reconnaît facilement qu'une équation de cette forme ne peut être satisfaite par un nombre commensurable non entier : toutes ses racines commensurables sont donc entières, et si l'on peut les trouver on connaîtra toutes les racines commensurables de la proposée, en divisant les premières par un nombre entier connu.

La question, étant ramenée à la recherche des racines entières d'une équation, est devenue très-simple. En effet, toute racine entière doit diviser le dernier terme, et, par conséquent, il n'y a qu'à essayer successivement tous les diviseurs de ce nombre, en réduisant ces essais au plus petit nombre possible. Nous n'en dirons pas davantage sur ce point, et nous admettrons que toutes les racines commensurables de l'équation proposée ont été trouvées, et qu'on a divisé son premier membre par les facteurs du premier degré en $x$ qui leur correspondent. Et après cette division on peut encore essayer si les mêmes racines annuleraient le quotient, auquel cas on supprimerait les nouveaux facteurs correspondants ; et l'on continuerait ainsi jusqu'à ce qu'on soit bien assuré que toutes les racines commensurables simples ou multiples ont été enlevées de l'équation.

Il ne reste plus alors qu'à chercher les racines incommensurables, ce qui offre des difficultés beaucoup plus grandes.

228. *Racines incommensurables.* — Quelque marche qu'on suive dans cette recherche, on commence toujours par tâcher de séparer toutes les racines, c'est-à-dire de trouver pour chacune deux nombres qui la comprennent entre elles, et n'en comprennent aucune autre. Si l'on y parvient, il existe divers procédés certains pour resserrer indéfiniment ces limites, et par conséquent pour connaître chaque racine à aussi peu près qu'on voudra. La première question à résoudre est donc la séparation des racines.

Lagrange est le premier qui l'ait résolue d'une manière rigoureuse. Il forme une équation qui ait pour racines toutes les différences deux à deux de celles de la proposée, supposées toutes inégales, ce qui est possible parce qu'on a des procédés généraux pour ramener tous les cas à celui-là; et il prend une limite inférieure de ses racines. Cette quantité étant moindre que la différence des racines les plus rapprochées, dans la proposée, si l'on substitue dans son premier membre des nombres croissant par degrés égaux à cette limite, on ne pourra passer par-dessus deux racines; il ne pourra y en avoir qu'une seule comprise entre deux nombres consécutifs, et quand cela arrivera on en sera averti par la différence des signes des deux résultats. Si donc on procède ainsi en partant de la limite inférieure des racines positives de la proposée, jusqu'à la limite supérieure, toutes les racines positives seront séparées; et ce sont les seules dont il soit nécessaire de s'occuper, puisque les racines négatives sont au signe près les racines positives de l'équation déduite de la proposée en changeant $x$ en $-x$.

Pour la commodité, tant des substitutions des nombres équidifférents que des calculs qui suivront, Lagrange divise toutes les racines par la différence de cette progression; les différences des racines, se trouvant divisées par ce même nombre, seront plus grandes que l'unité, et il suffira de substituer la suite des nombres entiers.

Les racines étant séparées, il les considère toutes successivement, et y applique le procédé suivant :

Si $a$ et $a+1$ désignent les deux nombres qui comprennent une seule de ces racines, on posera

$$x = a + \frac{1}{y},$$

l'équation en $y$ sera du même degré que celle en $x$, mais

elle n'aura qu'une seule racine positive plus grande que l'unité; il sera donc facile de trouver les deux nombres entiers $b$ et $b+1$ entre lesquels elle est comprise. On posera alors

$$y = b + \frac{1}{y'}.$$

L'équation en $y'$ sera encore du même degré que celle en $y$ et que celle en $x$, mais n'aura qu'une seule racine positive plus grande que l'unité. Désignant par $c$ et $c+1$ les deux nombres entiers consécutifs entre lesquels elle est comprise, on posera

$$y' = c + \frac{1}{y''}.$$

Si l'on s'arrêtait là, on aurait

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{y''}}},$$

$y''$ étant encore compris entre deux entiers consécutifs connus; et l'on appréciera facilement les limites entre lesquelles $x$ sera compris. Si elles ne sont pas assez rapprochées, on continuera d'appliquer le même procédé; et la théorie des fractions continues, qui donne la mesure de l'erreur, montre qu'en général elle décroît rapidement.

Au point de vue de la théorie pure, cette belle méthode ne laisse rien à désirer. Elle ne demande que des opérations qu'on sait effectuer, et pour la dignité de la science il était nécessaire de trouver un procédé qui conduisît avec certitude à la solution.

Mais la recherche de l'équation aux différences, ou aux carrés des différences, est très-laborieuse, et l'on a cherché avec plus ou moins de succès à l'éviter. La pratique y a

gagné dans bien des cas; mais les incertitudes inévitables des nouveaux procédés ôtent à la méthode cette netteté et cette précision qui distinguent celle de Lagrange.

229. Fourier a donné des moyens généraux très-simples pour reconnaître si deux nombres donnés ne comprennent aucune racine, ou s'ils peuvent en comprendre. Il fait connaître combien il peut au plus y en avoir de comprises, mais malheureusement il peut y en avoir un nombre moindre. Si cela est, la différence de ces deux nombres est un nombre pair, et indique autant de racines réelles manquant dans la proposée; par ce moyen on est dispensé de chercher des racines dans les intervalles où l'on a appris qu'il ne pouvait y en avoir.

Pour opérer la séparation des racines qui peuvent être dans un certain intervalle, il emploie des procédés d'une exécution facile, mais subordonnés aux résultats numériques successivement obtenus, et dont il n'est pas possible de bien préciser l'effet. Lorsqu'il est parvenu à séparer toutes les racines réelles, les procédés pour approcher indéfiniment de chacune d'elles comportent aussi quelques tâtonnements et essais, dirigés, il est vrai, vers un but bien déterminé, mais dont on ne peut calculer le nombre avec rigueur. Quand la recherche est arrivée à un certain degré bien défini, la méthode d'approximation qu'il emploie est celle de Newton, mais considérablement perfectionnée, tant sous le rapport de la rapidité que des moyens de s'assurer des limites de l'erreur. Cette méthode, que Newton n'a appliquée qu'aux équations à une seule inconnue, mais qui pourrait l'être à toutes les équations en nombre quelconque, dont on connaît des solutions suffisamment approchées, consiste à substituer aux inconnues ces valeurs approchées respectives augmentées de quantités indéterminées, qui dans le cas que l'on considère doivent avoir

des valeurs très-petites. D'après cela, on peut se croire en droit de négliger les puissances de ces inconnues, supérieures à la première, et leurs produits les unes par les autres; de sorte que la question est ramenée à la résolution d'équations du premier degré. C'est là le procédé employé par Newton, mais sans aucune des garanties et des moyens d'abréviation que renferme la méthode de Fourier, qui, sous tous ces rapports, n'a point encore été surpassée.

230. L'important théorème de Fourier sur le nombre des racines qui peuvent être comprises entre deux nombres donnés est d'une application très-facile, et comprend même, comme cas particulier, la célèbre règle des signes de Descartes. Mais il a, comme celui de Descartes, l'inconvénient de laisser croire à la possibilité de racines qui souvent n'existent pas, et de donner lieu à beaucoup de calculs inutiles, avant qu'on parvienne à reconnaître leur absence. Cette lacune dans la théorie de cet illustré géomètre devait être comblée de son vivant et, comme cela était assez naturel, par un de ses propres disciples.

231. Sturm, qui avait connaissance, comme il le dit lui-même, non-seulement des Mémoires publiés par son maître, mais encore de tous ses travaux manuscrits, et qui pouvait par conséquent juger avec précision ce qui manquait à la théorie, chercha d'abord à bien reconnaître ce qui empêchait Fourier de pouvoir assigner le nombre exact des racines comprises entre deux nombres donnés, et ne permettait d'en indiquer avec certitude qu'une simple limite. Ayant reconnu la cause, il chercha à y remédier en substituant aux fonctions dérivées employées par Fourier d'autres polynômes très-différents, qui n'offraient plus le même inconvénient. Et alors, imitant, comme il le dit avec naïveté, les démonstrations de son maître, il est parvenu à la découverte du théorème qui porte son nom, et qui permet

d'assigner le nombre exact des racines comprises dans un intervalle donné.

Malheureusement l'application de ce théorème n'est pas aussi facile que celle du théorème de Fourier; les calculs sont très-longs, par conséquent exposés à des erreurs qui pourraient infirmer les conséquences : on peut bien quelquefois les éviter par des remarques particulières, mais tout le monde ne peut pas les faire, et l'on a besoin de procédés que tout le monde puisse employer avec le même succès. Il est vrai que ces longs calculs pourraient servir dans le cas où l'on appliquerait la théorie des racines égales : mais enfin, pour le but même que se propose le théorème, le grand avantage qu'il procure est quelquefois acheté un peu cher.

Pour procéder à la séparation des racines réelles, supposées toutes inégales, on pourra chercher d'abord les nombres de racines comprises dans les intervalles des nombres successifs 0, 1, 10, 100, ... jusqu'à la limite supérieure, et l'on ne s'occupera que de ceux de ces intervalles où il s'en trouvera. Supposons, par exemple, qu'il y en ait trois entre 1 et 10. On essayera le nombre moyen 5 et l'on saura combien il y aura de racines entre 1 et 5, et par suite entre 5 et 10. S'il y en a une dans l'un des intervalles et deux dans l'autre, on ne s'occupera plus que de la séparation de ces deux : et pour cela on essayera le nombre moyen, et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que les trois soient séparés.

Ce procédé pourra exiger beaucoup d'essais, s'il y a des racines qui aient entre elles une très-petite différence; mais dans ce cas aussi le procédé de Lagrange en demanderait beaucoup, sans compter que, si l'on ne faisait pas usage de celui de Sturm, on ferait des essais innombrables dans des intervalles où il n'existe aucune racine. Les racines étant séparées, on procéderait à la recherche de leurs valeurs approchées au moyen de la méthode de Fourier.

Nous n'avons fait qu'indiquer imparfaitement ces remarquables méthodes, parce qu'il faudrait trop de développements pour les faire bien connaître, et que cela sortirait même des bornes qu'on s'impose ordinairement dans les Traités spéciaux d'Algèbre. C'est dans les ouvrages mêmes des auteurs qu'il faut les étudier : et nous devons d'autant plus nous en dispenser qu'elles n'offrent aucune difficulté fondamentale, et qu'on en saisit immédiatement l'esprit. Toutefois, il était nécessaire d'en dire quelques mots à cause de leur importance théorique et pratique.

232. *Racines imaginaires.* — Nous savons que les équations dont le premier membre est un polynôme à coefficients réels, ou de la forme $a + b\sqrt{-1}$, ne peut avoir que des racines réelles, ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, et que le nombre de ces racines est égal au degré de l'équation, en tenant compte du degré de multiplicité des racines.

Cela posé, si l'on cherches les racines de cette forme, il suffira de substituer à $x$, $y + z\sqrt{-1}$ dans l'équation, et d'égaler à zéro la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$. On aura ainsi deux équations entre $y$ et $z$, dont il faudra chercher les solutions communes réelles. Nous nous bornerons sur ce point à cette simple indication.

La résolution de deux équations à deux inconnues, à laquelle on est ainsi ramené, se fait ordinairement par l'élimination de l'une des deux, ce qui exige des calculs très-pénibles et des discussions très-épineuses, venant du défaut de réciprocité des problèmes successifs auxquels on est ramené. Cette question est traitée avec détail dans les ouvrages spéciaux; mais nous croyons d'autant plus pouvoir nous en dispenser que, pour la résolution des équations numériques, nous avons entendu Fourier déclarer positivement que la méthode d'élimination ne devait pas être

employée ; qu'il fallait approcher en même temps des valeurs de toutes les inconnues ; et que la seule méthode à employer était celle de Newton, étendue à plusieurs inconnues, et perfectionnée pour ce cas comme elle l'avait été pour le cas d'une seule inconnue. Malheureusement les idées de ce grand géomètre sur ce point important n'ont jamais été publiées.

Lorsque l'on aura étudié les principales théories de la Géométrie élémentaire, et de l'application réciproque que l'on peut faire de cette science et de celle des nombres, on pourra revenir sur la résolution des équations numériques et sur quelques autres questions que nous n'avons fait qu'indiquer, parce que leur solution est considérablement facilitée par les secours que la Géométrie peut prêter à la science des nombres.

# CHAPITRE XXIX.

## QUELQUES PROBLÈMES AYANT POUR OBJET LA DÉTERMINATION D'UNE FONCTION, D'APRÈS UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE.

233. Euler, cherchant à étendre la formule du binôme à un exposant quelconque, a été conduit à cette question : Trouver une fonction $\varphi$ satisfaisant à la condition que, quelles que soient les valeurs des variables $x$, $y$, on ait

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y).$$

Dans une autre question, Lagrange s'est proposé de déterminer une fonction $\varphi$ par cette autre condition

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y).$$

Les solutions de ces grands géomètres laissaient à désirer sous le rapport de la rigueur ; mais Cauchy, dans son *Cours d'Analyse algébrique,* en a donné qui sont exemptes de toute difficulté, et que nous présenterons avec de légères modifications.

### Problème I.

234. *Trouver la forme la plus générale de la fonction réelle $\varphi$ qui jouit de la propriété qu'on ait, quelles que soient les valeurs réelles de $x$, $y$,*

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y). \tag{1}$$

La marche que nous suivrons sera analytique, par voie

de déduction, c'est-à-dire que nous chercherons successivement de nouvelles propriétés dont doive jouir toute fonction qui satisfait à (1); en d'autres termes, admettant qu'une fonction $\varphi$ satisfasse à (1), nous en déduirons des conséquences, jusqu'à ce que nous parvenions à reconnaître qu'elle satisfera à quelque condition constituant une nouvelle question qu'on puisse résoudre.

Nous saurons seulement, d'après les méthodes générales exposées précédemment, que toutes les fonctions satisfaisant à la condition (1) sont renfermées parmi celles qui satisferont à la dernière; mais que celle-ci peut en renfermer d'étrangères, si l'on n'a pu s'assurer de la réciprocité. Il restera donc à les reconnaître et à s'en débarrasser, s'il est possible.

Nous remarquerons d'abord que, si une fonction satisfait à (1), quels que soient $y$ et $x$, elle y satisfera quand on prendra $y$ égal à $x$, et par conséquent satisfera à la suivante :

$$\varphi(x)\,\varphi(x) = \varphi(2x) \quad \text{ou} \quad \varphi(x)^2 = \varphi(2x).$$

De même elle satisfera à (1) en prenant $y = 2x$, ou à

$$\varphi(x)\,\varphi(2x) = \varphi(3x),$$

et, d'après la précédente, à

$$\varphi(x)^3 = \varphi(3x).$$

Continuant ainsi de prendre pour $y$ des multiples successifs de $x$, on arrivera à

$$(2) \qquad \varphi(x)^m = \varphi(mx),$$

$m$ représentant un nombre entier quelconque.

Ainsi toute fonction satisfaisant à la condition (1) satisfera à (2); et, par conséquent, si l'on déterminait toutes les

solutions de cette dernière, elles renfermeraient celles de la proposée, mêlées peut-être avec des solutions étrangères.

Mais nous allons démontrer que la fonction cherchée doit satisfaire à (2), non-seulement pour les valeurs entières et positives, mais pour toutes les valeurs réelles de $m$.

D'abord, l'équation (2) montrant que la fonction $\varphi(x)$ se trouve élevée à la puissance $m$, quand on multiplie la valeur arbitraire de la variable $x$ par $m$, il s'ensuit qu'en divisant la variable par un nombre entier $m$, on obtient la racine $m^{\text{ième}}$ de la fonction. Car, partant de la valeur $\frac{x}{m}$ de la variable, et par suite de la valeur $\varphi\left(\frac{x}{m}\right)$ de la fonction, si l'on multipliait la valeur $\frac{x}{m}$ par $m$, on aurait la puissance $m$ de $\varphi\left(\frac{x}{m}\right)$. Or on trouve $\varphi(x)$ en opérant ainsi sur la variable; donc $\varphi(x)$ est la puissance $m^{\text{ième}}$ de $\varphi\left(\frac{x}{m}\right)$; et, par suite,

$$\varphi\left(\frac{x}{m}\right) = \varphi(x)^{\frac{1}{m}}.$$

On peut passer de là à la multiplication de la variable par un nombre rationnel quelconque $\frac{p}{q}$.

En effet,

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right) = \varphi(x)^{\frac{1}{q}},$$

d'après ce qui vient d'être démontré; et si l'on multiplie par $p$ la valeur $\frac{x}{q}$ de la variable, on élève à la puissance $p$ la fonction; donc

$$\varphi\left(\frac{px}{q}\right) = \varphi(x)^{\frac{p}{q}},$$

Et, par conséquent, la fonction cherchée doit satisfaire

à l'équation (2), quel que soit $x$, et pour toute valeur positive commensurable de $m$, et par conséquent aussi pour toute valeur incommensurable.

Pour démontrer qu'elle y satisfera encore pour toute valeur négative de $m$, il faut d'abord connaître l'effet produit sur la fonction par le simple changement de signe de la variable. Pour cela, on fera $y = -x$ dans l'équation (1), qui devient alors

$$\varphi(x)\varphi(-x) = \varphi(0);$$

et, pour connaître $\varphi(0)$, on fera $y = 0$ dans (1), ce qui donnera

$$\varphi(x)\varphi(0) = \varphi(x),$$

et, par suite,

$$\varphi(0) = 1,$$

d'où résulte

$$\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Cela posé, soit

$$m = -n,$$

$n$ étant un nombre quelconque positif, on aura

$$\varphi(-nx) = \frac{1}{\varphi(nx)};$$

et, d'après l'équation (1) démontrée pour $m$ positif, on aura

$$\varphi(nx) = \varphi(x)^n.$$

Donc

$$\varphi(-nx) = \varphi(x)^{-n} \quad \text{ou} \quad \varphi(mx) = \varphi(x)^m,$$

pour toute valeur négative de $m$, les exposants négatifs étant entendus dans le sens expliqué précédemment.

On peut conclure de tout cela que toute fonction qui

satisfera à l'équation (1), quelles que soient les valeurs réelles de $x$, $y$, satisfera, quelles que soient les valeurs réelles de $x$ et $m$, à l'équation (2) qui est

$$\varphi(x)^m = \varphi(mx).$$

Elle satisferait donc aussi à la suivante :

$$\varphi(m)^x = \varphi(xm),$$

et, par conséquent, à celle-ci

$$\varphi(x)^m = \varphi(m)^x,$$

qui équivaut à

$$\varphi(x) = \varphi(m)^{\frac{x}{m}} = \left[\varphi(m)^{\frac{1}{m}}\right]^x.$$

La fonction $\varphi(x)$ ne peut donc être que la puissance $x$ d'une quantité indépendante de $x$, qu'on appelle ordinairement une *constante,* relativement à $x$, parce qu'elle peut conserver la même valeur quand $x$ varie.

Il ne reste donc plus qu'à connaître la valeur de cette constante $\varphi(m)^{\frac{1}{m}}$, que nous désignerons par $a$, et à s'assurer s'il n'y a pas de solutions étrangères.

Il suffira pour cela de substituer $a^x$, $a^y$ et $a^{x+y}$ à $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $\varphi(x+y)$, et de voir ce que doit être $a$ pour que la condition (1) soit remplie. Or elle l'est identiquement, quel que soit $a$. La solution de la question proposée peut donc être ainsi exprimée :

La fonction la plus générale qui satisfait à la condition (1) est l'exponentielle $a^x$, dont la base $a$ est quelconque, mais indépendante de la variable $x$.

Si l'on avait des données particulières sur la fonction $\varphi(x)$, la constante $a$ pourrait se trouver déterminée;

comme, par exemple, si l'on connaissait la valeur qu'elle doit avoir pour une certaine valeur de $x$.

### Problème II.

235. *Déterminer la fonction $\varphi$ par la condition que l'on ait, quelles que soient les valeurs réelles de $x$ et $y$,*

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y). \tag{1}$$

La suite des raisonnements est tellement semblable dans ce problème et dans le précédent, que nous ne ferons en quelque sorte que les rappeler.

Ainsi, en faisant successivement $y$ égal aux multiples entiers de $x$, on aura, pour toute valeur entière et positive de $m$,

$$m\varphi(x) = \varphi(mx). \tag{2}$$

Toute fonction $\varphi$ satisfaisant, quels que soient $x$ et $y$, à (1) devra donc satisfaire à (2), quel que soit $x$, pourvu que $m$ soit entier et positif.

On démontrera, comme dans le cas précédent, que cette fonction devra satisfaire à (2) pour toute valeur positive de $m$; et ensuite pour toute valeur négative, et par conséquent pour toute valeur réelle de $m$ aussi bien que de $x$.

Elle satisfera donc à la suivante :

$$x\varphi(m) = \varphi(xm),$$

et, par suite, à celle-ci

$$m\varphi(x) = x\varphi(m),$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\varphi(x) = x\frac{\varphi(m)}{m}.$$

La fonction cherchée est donc renfermée dans la forme

générale $ax$, $a$ désignant une quantité indépendante de $x$, ou une constante relativement à la variable $x$.

Pour savoir ce que doit être cette constante, et s'il y a des solutions étrangères, comme cela pourrait être, puisque la fonction trouvée satisfait seulement à une question qui est une conséquence de la proposée, il faut la substituer dans l'équation (1), qui est l'expression de cette dernière. Or on trouve une identité, quel que soit $a$.

On a donc pour la fonction $\varphi$ demandée

$$\varphi(x) = ax,$$

$a$ étant une constante arbitraire. Cette constante serait déterminée si l'on connaissait la valeur de $\varphi(x)$ pour une valeur particulière de $x$, différente de zéro.

## Problème III.

236. *Trouver la fonction la plus générale satisfaisant, quelques valeurs réelles qu'aient $x$ et $y$, à la condition*

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(xy). \tag{1}$$

Faisant $y = x$, on aura

$$\varphi(x)^2 = \varphi(x^2).$$

Faisant $y = x^2$, on aura

$$\varphi(x)^3 = \varphi(x^3);$$

et pour toute valeur entière et positive de $m$,

$$\varphi(x)^m = \varphi(x^m). \tag{2}$$

Or, puisque l'élévation de la variable à une puissance entière produit l'élévation de la fonction à la même puissance, il en sera de même pour l'extraction de la racine;

et si l'on fait ces deux opérations successivement, on trouvera que l'élévation de $x$ à la puissance positive quelconque $\frac{p}{q}$ produit l'élévation de $\varphi(x)$ à la puissance $\frac{p}{q}$.

La fonction qui satisfait à (1) pour toute valeur réelle de $x$ et $y$ satisfait donc à (2), quel que soit $x$ et quelle que soit la valeur positive de $m$.

Supposons maintenant $m$ négatif, et posons

$$m = -n,$$

d'où

$$x^m = \frac{1}{x^n},$$

$n$ étant positif.

Pour savoir comment, en général, doit changer la fonction $\varphi$ quand on change la variable dans sa valeur réciproque, faisons

$$y = \frac{1}{x},$$

(1) donnera

$$\varphi(x)\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(1);$$

et, pour connaître $\varphi(1)$, il faudra faire $y = 1$ dans (1), qui deviendra alors

$$\varphi(x)\varphi(1) = \varphi(x),$$

d'où

$$\varphi(1) = 1,$$

et, par suite,

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Il suit de là, en partant de la valeur $x^n$ de la variable,

$$\varphi\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{1}{\varphi(x^n)},$$

et, comme $n$ est positif, on a

$$\varphi(x^n) = \varphi(x)^n,$$

d'où

$$\varphi\left(\frac{1}{x^n}\right) = \varphi(x)^{-n} \quad \text{ou} \quad \varphi(x^{-n}) = \varphi(x)^{-n}.$$

L'équation (2) doit donc être satisfaite, quels que soient $x$ et $m$, par toute fonction satisfaisant à la question proposée.

Pour obtenir dans le second membre la symétrie que les deux problèmes précédents ont présentée, il suffit de poser

$$x = a^z,$$

$a$ étant une constante positive, pour que $x$ soit toujours réel; et $z$ pouvant avoir toutes les valeurs positives ou négatives, mais en s'assujettissant à ne prendre pour $x$ que des valeurs positives. L'équation (2) deviendra

$$\varphi(a^z)^m = \varphi(a^{mz}).$$

Changeant $z$ en $m$, et réciproquement, il vient

$$\varphi(a^m)^z = \varphi(a^{mz}),$$

d'où

$$\varphi(a^z)^m = \varphi(a^m)^z,$$

et, par suite,

$$\varphi(a^z) = \left[\varphi(a^m)^{\frac{1}{m}}\right]^z = b^z,$$

$b$ étant indépendant et positif, si l'on ne considère que les valeurs réelles de $\varphi(a^z)$ ou de $\varphi(x)$ de $z$, et par suite de $x$.

Remplaçant $a^z$ par $x$ et $b$ par $a^c$, la dernière équation devient

$$(3) \qquad \varphi(x) = x^c,$$

$c$ désignant une valeur réelle arbitraire.

Pour reconnaître si elle est assujettie à des restrictions, substituons cette forme de $\varphi$ dans (1), nous obtiendrons

$$x^c y^c = (xy)^c,$$

équation identique, quel que soit $c$.

La solution générale de la question proposée est donc donnée par la formule (3). Mais il faut bien remarquer que nous nous sommes assujettis à ne prendre que les valeurs positives des variables, pour n'avoir que des valeurs réelles pour la fonction.

## Problème IV.

237. *Trouver la fonction déterminée par la condition*

$$(1) \qquad \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy).$$

En donnant successivement à $y$ les valeurs $x$, $x^2$, $x^3$, ..., on obtient, pour toute valeur entière et positive de $m$,

$$(2) \qquad m\varphi(x) = \varphi(x^m).$$

On démontrera, comme dans le cas précédent, que toute fonction satisfaisant à (1) satisferait à (2), en y supposant à $x$ la même généralité que dans (1), et $m$ ayant une valeur quelconque positive ou négative.

Posons encore

$$x = a^z,$$

$a$ étant positif pour que $x$ soit toujours réel; $z$ pourra avoir toutes les valeurs positives ou négatives, mais $x$ sera toujours positif. L'équation (2) deviendra

$$m\varphi(a^z) = \varphi(a^{mz}),$$

$m$ et $z$ ayant des valeurs réelles quelconques, positives ou négatives.

On aura de même

$$z\varphi(a^m) = \varphi(a^{mz});$$

d'où

$$m\varphi(a^z) = z\varphi(a^m),$$

ou

$$m\varphi(x) = \frac{\log x}{\log a}\varphi(a^m),$$

les logarithmes étant pris dans une base quelconque. On tire de là

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(a^m)}{m\log a}\log x = b\log x,$$

$b$ désignant une quantité indépendante de $x$. Substituant dans (1), on trouve

$$b\log x + b\log y = b\log xy,$$

équation identique, quel que soit $b$ et quelle que soit la base du système. Mais ces deux arbitraires n'en font réellement qu'une, puisqu'on passe d'une base à une autre en multipliant tous les logarithmes par un même facteur. La solution la plus générale est donc exprimée par l'équation

$$\varphi(x) = \log x,$$

la base du système étant arbitraire.

Et il ne faut pas oublier que nous nous sommes assujettis à ne prendre pour $x$ que des valeurs positives.

# CHAPITRE XXX.

## DES SÉRIES.

238. On appelle *série* une suite de termes positifs ou négatifs, dont le nombre est illimité.

Les fractions décimales périodiques nous en ont offert le premier exemple. Les périodes, considérées avec leur valeur de position, constituaient même une des séries les plus simples que l'on puisse concevoir, une progression par quotient. En prenant au lieu de cela pour termes les différents chiffres avec leur valeur de position, on aurait une série dont la loi serait moins simple. Mais, de quelque manière qu'on réunisse les chiffres pour composer des termes, on obtiendra ce que nous nommons une *série;* tous ses termes seront positifs, et, comme nous l'avons prouvé, leur somme tendra vers une limite déterminée.

De quelque forme que soient les termes d'une série, il faut, pour qu'elle puisse donner lieu à des considérations de grandeur, quand on ne fixe pas le nombre des termes et qu'on entend les ajouter indéfiniment les uns aux autres, que la somme de ces termes converge vers une limite déterminée, lorsque leur nombre augmente sans limite.

Et commençons par rappeler le sens précis que nous attachons au mot *limite*.

*La limite d'une variable est une quantité fixe telle, que la différence de la variable à cette quantité puisse devenir et rester au-dessous de toute quantité désignée.*

Dans cette définition, il n'est pas question du signe de la différence; de sorte que la variable peut être tantôt inférieure, tantôt supérieure à la quantité fixe. La variable

peut être continue ou discontinue. La seule chose essentielle, c'est qu'après des écarts, aussi irréguliers qu'on voudra les imaginer, la variable finisse par rester comprise entre deux valeurs, l'une plus grande, l'autre plus petite que la quantité fixe, et dont la différence à cette quantité puisse être prise moindre que toute grandeur désignée, si petite qu'elle soit.

239. Il n'est utile de considérer que les séries dont la somme des termes tend vers une limite à mesure que leur nombre augmente indéfiniment. Nous les désignerons sous le nom de séries *convergentes*. Nous appellerons *divergentes* celles dont la somme des termes ne tend vers aucune limite, soit parce qu'elle grandit indéfiniment avec un signe quelconque, soit que, tout en restant limitée, elle ne s'approche indéfiniment d'aucune quantité fixe. Ces dernières ne peuvent représenter aucun nombre déterminé. Les premières, au contraire, peuvent représenter leur limite à aussi peu près qu'on voudra.

240. L'expression d'une quantité par une série dont elle est la limite peut avoir pour objet de substituer à une indication d'opérations compliquées une suite de termes plus simples, et dont on peut souvent choisir la forme de manière qu'elle soit le mieux appropriée à la question. C'est ce qu'on fait quand on substitue une fraction décimale périodique à une fraction ordinaire. Quelquefois la quantité développée en série ne peut être obtenue exactement, même quand les nombres dont elle dépend sont particularisés, comme par exemple quand elle dépend d'extractions de racines de nombres qui ne sont pas des puissances exactes. Enfin la quantité développée peut être une inconnue, dépendant même de variables arbitraires, et qu'il est possible de considérer comme limite de la somme d'un

nombre indéfini de termes renfermant ces variables sous la forme qu'on a jugée la plus favorable.

Dans tous les cas, pour qu'une série puisse être employée au calcul des grandeurs, il faut qu'elle ait une limite et que cette limite soit bien la quantité qu'on a voulu exprimer. La première chose dont on doit s'occuper dans cette théorie est donc de trouver des moyens de s'assurer si une série est ou n'est pas convergente. Nous ne nous arrêterons pas à démontrer ces règles, qui se trouvent dans tous les Traités; mais nous ne pouvons non plus nous dispenser entièrement d'en parler.

### DES RÈGLES POUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES.

**241.** La plus simple de toutes les séries convergentes est la progression par quotient, dont la raison est plus petite que l'unité. Archimède est le premier qui ait donné l'expression de la somme de ses termes, et ait reconnu la limite vers laquelle elle tend. C'est à cette série qu'on a d'abord pensé à comparer toutes les autres ayant comme elle tous leurs termes positifs.

Cette comparaison est fondée sur cette considération bien évidente que, si tous les termes d'une série sont inférieurs à leurs correspondants dans une autre, la somme d'un même nombre quelconque de termes, supposés tous positifs, sera moindre dans la seconde que dans la première; et que, par conséquent, si cette somme tend vers une limite dans la première, elle aura aussi une limite dans la seconde. Comme aussi on peut affirmer que si deux séries à termes positifs sont telles, que les termes de la seconde soient tous plus grands respectivement que ceux de la première, et que la somme des termes de celle-ci croisse indéfiniment avec le nombre des termes, il en sera de même à plus forte raison dans la seconde.

D'après cela, il a été assez naturel de penser que, puisqu'une série est convergente lorsque le rapport d'un terme au précédent est constant et plus petit que l'unité, il en serait de même d'une série dans laquelle ce rapport ne serait pas constant, mais serait toujours inférieur à un nombre fixe plus petit que l'unité. Car ses termes seraient inférieurs à ceux de la série que l'on obtiendrait en prenant, au lieu du véritable rapport, ce nombre fixe qui lui est constamment supérieur. Or cette dernière serait une progression par quotient, ayant une limite. La proposée en aurait donc aussi.

Et il faut bien remarquer qu'il n'est pas nécessaire que cette condition ait lieu dès le premier terme de la série; il suffit qu'elle ait lieu depuis un certain terme, quelque avancé qu'il soit dans la série : car, la somme de tous les termes précédents étant déterminée, l'existence d'une limite pour la somme des termes de la série ne dépend pas de ceux qui suivent. On a donc pu formuler cette première règle pour reconnaître la convergence des séries dont tous les termes sont positifs, et qui est vraie à plus forte raison quand les signes ne sont pas tous les mêmes :

« Une série est convergente quand, à partir d'un de ses termes, le rapport d'un terme au précédent est toujours au-dessous d'un nombre fixe plus petit que l'unité. »

242. Et l'on conclut facilement de ce qui précède cette autre proposition :

« Une série est divergente quand, à partir d'un de ses termes, le rapport d'un terme au précédent est toujours supérieur à un nombre fixe plus grand que l'unité. »

Car ses termes seront supérieurs à ceux d'une progression par quotient dont le rapport sera plus grand que l'unité, et dont les termes iront par conséquent en croissant sans limite. Ainsi la somme des termes de la série proposée

croîtra sans limite s'ils sont de même signe; et, lors même que les termes seraient les uns positifs, les autres négatifs, ce qui tend à établir des compensations, la série ne satisferait pas aux conditions qui entrent dans notre définition de limite, puisque, ses termes croissant sans limite, la différence de deux sommes consécutives croîtra indéfiniment; et par conséquent leur différence à une même quantité fixe ne peut être au-dessous de toute grandeur donnée. La même conclusion aurait encore lieu si les termes, au lieu de croître indéfiniment, étaient seulement toujours supérieurs à un nombre fixe, si petit qu'il fût.

243. Mais quelle règle donner pour reconnaître si le rapport d'un terme au précédent finit par être toujours inférieur à un nombre plus petit que l'unité, ou toujours supérieur à un nombre plus grand que l'unité ?

Lorsque la loi de la série ne permettra pas de reconnaître immédiatement l'une ou l'autre de ces conditions, on prendra l'expression générale du rapport d'un terme au précédent, et l'on aura ainsi une certaine fonction du nombre qui exprime le rang du premier des deux. On cherchera la limite vers laquelle tend cette fonction à mesure que ce nombre augmente, et c'est à ce problème bien déterminé que se ramène la solution de celui qu'on se propose. Car si cette limite est moindre que l'unité, le rapport, qui en approche indéfiniment, finira par être toujours inférieur à tout nombre compris entre cette limite et un nombre choisi arbitrairement entre elle et l'unité. Et l'on voit de même que le rapport finira par être toujours supérieur à un nombre plus grand que l'unité, si cette limite est plus grande que l'unité.

Le seul cas où il y aurait doute sur la convergence ou la divergence d'une série serait donc celui où la limite en question serait l'unité. Et encore il n'y aurait aucun doute

si le rapport tendait vers l'unité, en étant toujours au-dessus : car alors les termes de la série iraient constamment en croissant, et, par conséquent, quels que fussent leurs signes, la série ne serait pas convergente.

C'est donc pour le cas que cette première règle si simple laisse douteux qu'il faut en chercher d'autres plus efficaces ; et c'est à quoi l'on est parvenu, sans en avoir cependant pu découvrir qui soient applicables avec succès à tous les cas. Nous laisserons ces détails intéressants aux Ouvrages et Mémoires qui traitent ce sujet spécial.

244. *Limite de l'erreur.* — Quand on veut calculer par approximation la limite de la somme des termes d'une série, il est absolument nécessaire de déterminer une limite supérieure de l'erreur commise, en arrêtant la somme à un terme quelconque. Cela est facile lorsque l'on a reconnu qu'à partir de ce terme le rapport d'un quelconque au précédent est au-dessous d'un nombre connu, plus petit que l'unité. Car alors, en supposant le même signe $+$ à tous les suivants, la limite de leur somme, qui constitue l'erreur, est moindre que la limite de la somme d'une progression convergente connue ; cette dernière est donc supérieure à l'erreur commise, et la question est résolue.

245. *Séries dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.* — Si, à partir d'un certain terme d'une série, les suivants sont alternativement positifs et négatifs, décroissant constamment et pouvant devenir moindres que tout nombre donné, la série est toujours convergente ; et à quelque terme qu'on arrête la somme, l'erreur est moindre que le terme suivant, et de même signe que lui.

La démonstration de cette proposition est très-facile, et nous n'en parlerons pas ; mais nous ferons sur ces sortes de séries une remarque assez curieuse, quoique sans grande utilité.

Si l'on considère séparément la série formée de tous les termes positifs de la proposée, et celle qui serait formée de tous ceux qui sont négatifs, et qu'on prendrait avec le signe $+$, les sommes des termes de ces deux nouvelles séries pourraient n'avoir pas de limite, parce qu'il ne suffit pas pour cela que les termes tendent vers zéro. Dans le cas où elles n'en auraient ni l'une ni l'autre, la somme des termes de la proposée est la différence de deux sommes variables, indéfiniment croissantes, et dans lesquelles il est expressément entendu que le nombre des termes sera le même, à une unité près tout au plus. Mais ce serait un non-sens que de dire que la limite de la proposée est la différence des sommes infinies des deux séries. Et ce serait une erreur de croire qu'on peut prendre des nombres arbitrairement inégaux de termes dans l'une et dans l'autre, et faire la différence des deux sommes. On n'aurait aucune raison de croire que la limite de cette différence serait la limite de la proposée, qui s'obtient en prenant des nombres de termes égaux, à une unité près tout au plus. Mais il y a plus, et l'on peut facilement reconnaître que, même en avançant indéfiniment dans les deux séries, la différence des sommes est complétement indéterminée, ainsi que sa limite.

En effet, que l'on prenne dans l'une des deux un certain nombre de termes; on pourra dans l'autre, dont la somme n'a pas de limite, prendre assez de termes pour que leur somme surpasse la première de plus qu'une quantité désignée, ou soit avec elle dans un rapport supérieur à un rapport donné. On peut donc avoir pour la différence des deux sommes une quantité tendant vers une limite arbitraire, ou même devenant plus grande que toute quantité donnée.

Il n'y a là rien de plus remarquable que dans toutes les questions où une quantité est la limite de la différence de deux quantités indéfiniment croissantes, mais qui doivent

être prises simultanément suivant des conditions bien déterminées. La Géométrie en offrirait des exemples simples, en aussi grand nombre que l'on voudrait.

Ce n'est pas seulement la différence de deux quantités indéfiniment croissantes qui peut donner lieu à ces remarques. On exprime quelquefois des quantités par le rapport de deux produits composés d'un nombre indéfiniment croissant de facteurs : c'est ainsi, par exemple, que Wallis a représenté le rapport de la circonférence au diamètre. Le nombre des facteurs doit être le même au numérateur qu'au dénominateur; et si l'on en mettait seulement un de plus d'un côté ou de l'autre, on aurait des résultats entièrement erronés. Dans ce cas, c'est le rapport au lieu de la différence de deux quantités indéfiniment croissantes; et il n'y a pas lieu de dire que la limite du rapport ou de la différence est le rapport ou la différence des limites, puisque ces limites n'existent pas. Mais si l'on fait ce que les raisonnements ont prescrit, on n'éprouve aucune difficulté; et si l'on fait autre chose, à quelque contradiction ou absurdité qu'on arrive, on n'a pas le droit de s'en étonner.

Lejeune-Dirichlet est, je crois, le premier qui ait publié la remarque que divers groupements des termes positifs et négatifs d'une série peuvent donner des résultats différents pour les limites. Je pense que ceux qui voudront bien réfléchir un instant sur ce que nous venons de dire trouveront qu'on a attaché trop d'importance à la remarque de cet éminent géomètre.

246. *Remarque sur les séries qui sont convergentes quand tous leurs termes sont pris avec le même signe.* — Soient deux séries convergentes, ayant tous leurs termes positifs,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots.$$

Désignons par S, S′ les limites de leurs sommes, et par $S_n$, $S'_n$ les sommes des $n$ premiers termes de chacune d'elles; et formons une troisième série dont le terme général soit

$$v_1 u_n + v_2 u_{n-1} + v_3 u_{n-2} + \ldots + v_{n-1} u_2 + v_n u_1.$$

Il est facile de voir que la somme $\sigma_n$ des $n$ premiers termes de cette nouvelle série sera plus petite que le produit des deux polynômes $S_n$, $S'_n$, et plus grande que le produit de $S_p$, par $S'_p$, $p$ désignant la moitié de $n$ ou de $n+1$, suivant que $n$ sera pair ou impair : de sorte qu'on aura

$$\sigma_n < S_n S'_n \quad \text{et} \quad \sigma_n > S_p S'_p.$$

Or les deux produits $S_p S'_p$ et $S_n S'_n$ ont la même limite SS′ : donc $\sigma_n$, qui est compris entre les deux, a aussi pour limite SS′.

**247.** Et l'on voit en même temps qu'il en serait de même si les deux séries n'avaient pas tous leurs termes positifs, pourvu qu'elles restassent convergentes en prenant tous leurs termes avec le signe +.

En effet, si l'on forme la troisième série au moyen des deux séries telles qu'elles sont données, $\sigma_n$ contiendra tous les termes que donnerait la multiplication de $S_p$ par $S'_p$, et d'autres encore, dont nous allons montrer que la somme tend vers zéro. En effet, si, au lieu de les prendre avec leurs véritables signes, on les prenait tous avec le signe +, leur somme serait la différence qui existerait entre les valeurs que l'on trouverait au lieu de $\sigma_n$ et de $S_p S'_p$, si l'on prenait tous les termes des deux séries proposées avec le signe +. Or cette différence a une limite nulle, puisqu'il vient d'être démontré que dans ce cas $\sigma_n$ et $S_p S'_p$ ont la même limite. Il en est donc de même dans le cas des séries proposées.

# CHAPITRE XXXI.

## DE LA FORME SINGULIÈRE SOUS LAQUELLE SE PRÉSENTE LA BASE DU SYSTÈME DE LOGARITHMES DE NEPER; SÉRIE QUI LA REPRÉSENTE. — DÉTERMINATION DE QUELQUES AUTRES EXPRESSIONS SINGULIÈRES.

248. Nous avons montré précédemment que tous les nombres pouvaient être considérés comme les puissances d'une base fixe, et nous avons nommé l'exposant de cette puissance le logarithme du nombre correspondant : de sorte que, dans la base $a$, la relation entre un nombre quelconque $y$ et son logarithme $x$ est

$$y = a^x; \tag{1}$$

d'où l'on voit que, si l'on prend des logarithmes en progression par différence, commençant par zéro, les nombres correspondants formeront une progression par quotient, commençant par l'unité.

C'est cette dépendance que le premier inventeur a établie entre les nombres et leurs logarithmes, et non celle qu'exprime l'équation exponentielle (1). En partant de cette définition, il a démontré les théorèmes au moyen desquels les opérations sur les nombres sont ramenées à des opérations de degré inférieur sur leurs logarithmes, à la condition d'avoir construit une table qui fasse connaître le logarithme par le nombre, et le nombre par le logarithme.

De même que notre définition, représentée par l'équation (1), a conduit à la propriété qui a servi de définition

à Neper, il est facile réciproquement de déduire la nôtre de celle-ci.

Soient, en effet, les deux progressions

$$\begin{array}{l} \div\div 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : \ldots : (1+\alpha)^m : \ldots, \\ \div 0. \quad \delta \quad . \quad 2\delta \quad \ldots\ldots \quad m\delta \quad \ldots\ldots \end{array}$$

Si l'on désigne par $x$ et $y$ les deux termes correspondants au rang quelconque marqué par le nombre $m$, on aura

$$y = (1+\alpha)^m, \quad x = m\delta,$$

et l'on aura la relation générale entre un nombre et son logarithme, en éliminant $m$ entre ces deux équations; ce qui donnera

$$(2) \qquad y = (1+\alpha)^{\frac{x}{\delta}}.$$

Or, pour que la considération de ces deux progressions puisse être utile aux calculs numériques, il faut que les nombres entiers auxquels ils se ramènent toujours puissent être considérés comme faisant partie de la progression par quotient, sinon exactement, du moins avec une approximation suffisante. Il faut donc prendre pour $\alpha$ une valeur extrêmement petite, afin que les termes croissent très-peu et que tout nombre entier qui n'en ferait pas partie puisse, avec une très-faible erreur, être remplacé par l'un des deux termes entre lesquels il est compris.

Pour arriver à ce point, on peut imaginer qu'on parte de deux progressions déterminées, et qu'on insère un même nombre de moyens considérable entre les termes de l'une et de l'autre. Mais, sans nous arrêter aux divers procédés dont on peut faire usage, admettons que $\alpha$ et $\delta$ soient des quantités aussi près de zéro que l'on voudra, l'équation (2) exprimera toujours la relation entre un nombre quelconque

et son logarithme. Et si l'on veut atteindre, au moins par la pensée, sinon par le calcul effectif, à la représentation exacte des nombres entiers, il faut se figurer qu'on fait décroître $\alpha$ et $\delta$ indéfiniment, et que tout nombre entier soit la limite des deux termes qui le comprendront, pour chaque système de valeurs de $\alpha$ et $\delta$.

La relation à établir entre ces deux variables est évidemment arbitraire, et Neper a choisi la plus simple : il a pris $\delta = \alpha$. L'équation (2), dans cette hypothèse, devient

$$y = (1 + \alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = \left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x;$$

et, pour avoir l'équation qui tend de plus en plus à exister entre les nombres et leurs logarithmes, il faut chercher la limite de $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Si on la désigne par $e$, on aura dans le système de Neper, considéré à la limite où tous les nombres croissant d'une manière continue se trouveraient représentés, et auraient des logarithmes croissant aussi d'une manière continue, on aura entre tout nombre $y$ et son logarithme $x$ l'équation exponentielle

$$y = e^x.$$

Il reste donc, pour connaître la base $e$ du système de logarithmes de Neper, à déterminer la limite de la fonction $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, quand la variable $\alpha$ tend vers zéro ; et c'est de cette recherche que nous allons nous occuper.

249. Nous préviendrons d'abord une erreur très-grave, que l'on serait peut-être porté à commettre dans la recherche des limites de fonctions. On pourrait croire qu'il serait permis de partager la difficulté en cherchant d'abord la limite qu'elle aurait si l'on conservait une valeur constante à la variable dans certaines parties de l'expression,

et cherchant ensuite la limite correspondant à la variation dans les parties restées d'abord constantes. Il n'est pas besoin de montrer par des exemples l'inexactitude d'un pareil procédé : il suffit de remarquer qu'on n'exécute pas ainsi ce qui est demandé, puisque la variable doit avoir la même valeur dans toutes les parties de l'expression; et dès lors on ne peut être sûr que le résultat n'en sera point altéré. Ce serait une chose à démontrer, quand cela est; et il y a beaucoup de cas où cela n'est pas.

Dans la question actuelle, par exemple, on serait conduit à un résultat inexact, en laissant l'exposant $\frac{1}{\alpha}$ constant, et faisant tendre $\alpha$ vers zéro dans $(1+\alpha)$. En faisant ainsi, et élevant à la puissance $\frac{1}{\alpha}$ la limite de $1+\alpha$, ou $1$, on aurait $1^{\frac{1}{\alpha}}$. Or toute puissance de $1$ étant $1$, $1^{\frac{1}{\alpha}}$ resterait toujours égal à l'unité quand on ferait tendre $\alpha$ vers zéro, et la limite de $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ ainsi cherchée serait l'unité, ce qui est, comme nous allons le voir, contraire à la vérité.

**250.** Pour trouver la limite de $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, nous supposons d'abord (comme le fait M. Cauchy dans son *Cours d'Analyse algébrique*) que la variable $\alpha$, qui a pour limite zéro, soit égale à l'unité divisée par un nombre entier $m$, indéfiniment croissant; et l'expression en question deviendra

$$(3) \qquad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Or, $m$ étant un nombre entier positif, on pourra développer cette puissance d'après la formule du binôme, et l'on aura

$$1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+\ldots+\frac{1}{m^m},$$

ou

$$(4)\quad 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{m^m}.$$

On reconnaît déjà cette propriété remarquable de l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, c'est qu'elle augmente constamment avec $m$. En effet, tous les termes du développement sont positifs; un terme de rang déterminé quelconque augmente avec $m$, puisque son dénominateur est constant et que les facteurs de son numérateur augmentent; et enfin il s'introduit de nouveaux termes, puisque leur nombre est $m+1$.

On remarquera ensuite que tous ces termes sont inférieurs à ceux de la série suivante, qui en sont les limites respectives,

$$(5)\qquad 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.$$

On reconnaît facilement, par la règle établie ci-dessus, que cette série est très-rapidement convergente, et que sa limite est comprise entre 2 et 3. Mais il s'agit de démontrer que cette limite est celle de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

En effet, supposons $m$ assez grand pour que les $n$ premiers termes de (4) soient assez voisins des correspondants de (5) pour que les deux sommes diffèrent aussi peu qu'on voudra. La seconde de ces deux sommes différant de la limite de (5) d'une quantité qui peut être supposée moindre que toute quantité désignée, il en sera donc de même de la première, et à plus forte raison de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, qui, étant plus grand, est plus rapproché encore de la limite de (5), qui lui est toujours supérieure. La différence entre

$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ et la limite de (5), qui est une quantité fixe, pouvant devenir et rester moindre que toute quantité donnée, l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ a donc pour limite celle de la série (5).

Ce résultat remarquable est dû à Euler.

251. On pourrait, il est vrai, se demander si l'on trouverait la même limite pour $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, si les valeurs croissantes de $m$ n'étaient pas entières, mais composées d'un nombre entier augmenté d'une quantité quelconque plus petite que l'unité. C'est ce qu'on peut établir facilement.

Soient, en effet, $\mu$ et $\mu+1$ les deux nombres entiers entre lesquels $m$ est compris, on aura

$$m=\mu+\varepsilon,$$

en désignant par $\varepsilon$ un nombre positif plus petit que l'unité. Or il est facile de voir que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ sera plus petit que $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1}$ et plus grand que $\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu}$, expressions qui peuvent se mettre respectivement sous les formes suivantes :

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right) \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)}.$$

Et comme les facteurs $1+\frac{1}{\mu}$ et $1+\frac{1}{\mu+1}$ ont pour limite 1, les deux expressions ont les mêmes limites que $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$

et $\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}$, qui rentrent dans l'expression (1); on retrouve donc encore la limite de la série (5).

252. Nous pourrions nous borner là si nous ne voulions traiter que la question actuelle, où $\alpha$ est positif. Mais comme il y a des cas où il est négatif, en entendant toujours qu'on le traite de la manière précédemment expliquée, il est nécessaire d'examiner cette hypothèse pour avoir un résultat entièrement général.

Or, si $\alpha$ est négatif et tend vers zéro, $1+\alpha$ est plus petit que 1 et tend vers 1. Si donc on pose

$$1+\alpha=\frac{1}{1+\beta},$$

$\beta$ sera positif et tendra vers zéro. On tire de là

$$\alpha=\frac{-\beta}{1+\beta}$$

et

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{-\frac{1+\beta}{\beta}}=(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}+1}=(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}(1+\beta),$$

expression dont la limite est la même encore que dans les cas précédents.

On peut donc énoncer cette proposition :

De quelque manière que la variable $\alpha$ tende vers zéro, qu'elle soit positive ou négative, continue ou discontinue, l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tendra vers une même limite, qui est celle de la somme de la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.$$

On désigne ordinairement cette limite par la lettre $e$; sa

valeur est irrationnelle, et les premiers chiffres qui la représentent sont 2,718281828.... C'est là la base du système de Neper; mais il ne l'a pas choisie : elle s'est trouvée conséquence de la supposition qu'il a voulu faire, d'un accroissement égal du premier au second terme de ses deux progressions.

253. *Remarque.* — Si, au lieu de chercher la limite de $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, on cherchait celle de $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$, on aurait $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ au lieu de (3); et au lieu de (4) on aurait les mêmes termes multipliés par les puissances 0, 1, 2, ... de $x$. On aurait donc pour limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ la série suivante,

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots;$$

et l'on prouverait de même que, quel que soit le signe de $\alpha$, on aura, pour toute valeur de $x$,

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots,$$

formule qui est encore due à Euler, ainsi que les suivantes qui s'en déduisent.

Mais

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}=(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}x}=\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^x,$$

et, comme $\alpha x$ tend vers zéro, $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}$ a pour limite $e$.

Donc

$$(6)\qquad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots.$$

Et si au lieu de $e^x$ on voulait développer $a^x$ en série, $a$ désignant un nombre positif quelconque, on remplacerait $a$ par $e^{la}$, $l$ désignant les logarithmes dans la base de Neper; on aurait ainsi

$$a^x = e^{xla};$$

et comme la formule (6) a lieu quel que soit $x$, on aura, en y remplaçant $x$ par $x\,la$,

$$(7) \qquad a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{x^2\,l^2 a}{1.2} + \frac{x^3\,l^3 a}{1.2.3} + \ldots.$$

### QUELQUES EXPRESSIONS SINGULIÈRES QUI SE RAMÈNENT A LA PRÉCÉDENTE.

254. La limite de $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ qui se présenterait sous la forme insignifiante de $1^\infty$, si l'on mettait au lieu de la variable $\alpha$ sa limite zéro, conduit facilement à la connaissance des limites de quelques autres fonctions qui prendraient d'autres formes singulières, si l'on substituait aux variables dont elles dépendent les limites vers lesquelles elles tendent.

Soit proposé, par exemple, de trouver la limite de la fonction $\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}$, lorsque $\alpha$ tend vers zéro. Si l'on mettait dans cette fonction, au lieu de $\alpha$, sa limite, on trouverait la forme singulière $\frac{0}{0}$, qui n'apprendrait rien; de sorte qu'il faut prendre une autre voie pour obtenir la limite cherchée.

Pour cela nous transformerons cette fonction de $\alpha$ par un changement de variable, et nous poserons

$$a^\alpha - 1 = \beta \quad \text{ou} \quad a^\alpha = 1 + \beta,$$

elle deviendra ainsi $\frac{\beta}{\alpha}$, et $\beta$ tendra vers zéro; mais il fau-

dra tenir compte de la relation entre $\alpha$ et $\beta$, sans quoi l'expression $\frac{\beta}{\alpha}$ ne serait pas déterminée. Cette relation donne

$$\alpha \log a = \log(1 + \beta),$$

d'où

$$\alpha = \frac{\log(1 + \beta)}{\log a}.$$

L'expression proposée en $\alpha$ se transforme donc dans la suivante en $\beta$ :

$$\frac{\beta \log a}{\log(1 + \beta)} = \frac{\log a}{\log(1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}}},$$

et la limite de cette expression est évidemment $\frac{\log a}{\log e}$, ou $la$ en prenant les logarithmes dans la base de Neper.

Et il sera bon de se rappeler que, si $\varepsilon$ désigne une variable quelconque tendant vers zéro, le logarithme népérien de $(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ tendra vers l'unité ; et, comme ce logarithme est $\frac{l(1 + \varepsilon)}{\varepsilon}$, on pourra toujours, dans les recherches des limites, supprimer les facteurs de la forme $\frac{l(1 + \varepsilon)}{\varepsilon}$, parce qu'ils ne donneraient que des facteurs égaux à l'unité dans la limite.

255. Soit maintenant l'expression

$$\frac{(1 + \alpha)^m - 1}{\alpha},$$

dans laquelle la variable $\alpha$ tend vers zéro. Si l'on y faisait $\alpha = 0$, on trouverait encore $\frac{0}{0}$, ce qui n'apprendrait rien sur la limite de l'expression. Pour la déterminer, nous fe-

rons encore un changement de variables, et nous poserons

$$(1+\alpha)^m - 1 = \beta \quad \text{ou} \quad (1+\alpha)^m = 1+\beta.$$

L'expression proposée deviendra

$$\frac{\beta}{\alpha};$$

$\beta$ tendra vers zéro, et il faudra exprimer, s'il est possible, $\alpha$ en $\beta$, ou tenir compte d'une autre manière de la relation établie entre ces deux variables.

La valeur de $\alpha$ en $\beta$ serait

$$\alpha = \sqrt[m]{1+\beta} - 1$$

et n'offrirait aucun avantage sur la première forme : aussi ce n'est pas ce moyen que nous emploierons.

La relation entre $\alpha$ et $\beta$ donnera, en prenant les logarithmes de ses deux membres dans la base $e$,

$$m\,l(1+\alpha) = l(1+\beta);$$

et, d'après une remarque précédente, on aperçoit facilement qu'il y aura avantage à multiplier chacun des deux termes de $\frac{\beta}{\alpha}$ respectivement par les deux membres de cette dernière équation, de la manière suivante :

$$\frac{m\,l(1+\alpha)\,\beta}{\alpha\,l(1+\beta)}.$$

Or on voit immédiatement que cette expression, égale à $\frac{\beta}{\alpha}$, a pour limite $m$, puisque les deux facteurs $\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}$ et $\frac{\beta}{l(1+\beta)}$ ont pour limite l'unité; d'où l'on conclut que,

quand $\alpha$ tend vers zéro, on a, quel que soit $m$,

$$\lim \frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha} = m.$$

256. Considérons encore l'expression

$$\frac{(1+\alpha)^m - 1}{m},$$

$\alpha$ étant un nombre fixe quelconque, et $m$ une variable dont la limite est zéro. On ne peut encore dans cet exemple faire tendre $m$ vers zéro dans les deux termes de la fraction, qui se présenterait sous la forme insignifiante $\frac{0}{0}$.

Mais si l'on pose, comme dans le précédent,

$$(1+\alpha)^m = 1 + \theta,$$

l'expression proposée devient

$$\frac{\theta}{m},$$

dans laquelle il faut tâcher de substituer à $m$ sa valeur en $\theta$. Or la relation entre $m$ et $\theta$ donne

$$m\, l(1+\alpha) = l(1+\theta),$$

d'où

$$m = \frac{l(1+\theta)}{l(1+\alpha)}.$$

Reportant cette valeur de $m$ dans la fraction $\frac{\theta}{m}$, elle devient

$$\frac{\theta\, l(1+\alpha)}{l(1+\theta)},$$

dont la limite est $l(1+\alpha)$, puisque, $\theta$ tendant vers zéro,

$\frac{\varepsilon}{l(1+\varepsilon)}$ tend vers l'unité. On a donc, $m$ tendant vers zéro,

$$\lim \frac{(1+\alpha)^m - 1}{m} = l(1+\alpha),$$

comme Euler l'a encore indiqué.

257. *Limite de* $\frac{a^x}{x}$ *quand* $x$ *croît indéfiniment.* — Si $a$ était plus petit que l'unité, $a^x$ tendrait vers zéro, et à plus forte raison $\frac{a^x}{x}$. Le seul cas à considérer est donc celui de $a > 1$. En remplaçant $a^x$ par le développement démontré ci-dessus, on aura

$$\frac{a^x}{x} = \frac{1}{x} + la + \frac{x\,l^2 a}{1.2} + \frac{x^2\,l^3 a}{1.2.3} + \ldots;$$

et la seule inspection du second membre montre que $\frac{a^x}{x}$ croît indéfiniment avec $x$, puisque tous les termes sont positifs et qu'à partir du troisième chacun d'eux croît indéfiniment.

258. *Limite de* $\frac{\log(x)}{x}$ *quand* $x$ *croît indéfiniment.* — Si l'on appelle $a$ la base du système dans lequel on considère le logarithme de $x$, on aura, en le désignant par $y$,

$$x = a^y \quad \text{et} \quad \frac{\log x}{x} = \frac{y}{a^y}.$$

Il y a deux cas à distinguer, suivant que l'on a

$$a > 1 \quad \text{ou} \quad a < 1.$$

Soit d'abord

$$a > 1.$$

$x$ et $y$ croissent ensemble indéfiniment; et, d'après la proposition précédente, $\frac{y}{a^y}$ tendra vers zéro, et par suite aussi $\frac{\log x}{x}$.

Si l'on a

$$a < 1,$$

il faut, pour que $x$ croisse indéfiniment, que $y$ soit négatif, et que sa valeur absolue croisse indéfiniment. Posant

$$a = \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad y = -z,$$

$b$ sera plus grand que 1 et $z$ sera positif et croîtra indéfiniment. On aura alors

$$\frac{\log x}{x} = -\frac{z}{\left(\frac{1}{b}\right)^{-z}} = -\frac{z}{b^z},$$

dont la limite sera encore zéro.

On voit donc que, quelle que soit la base du système, la limite de $\frac{\log x}{x}$ sera zéro, quand $x$ croîtra indéfiniment.

259. *Limite de $x^{\frac{1}{x}}$ quand $x$ croît indéfiniment.* — La forme singulière de cette limite serait $\infty^0$, d'après les notations insignifiantes employées souvent dans l'Algèbre, et que nous ne mentionnons que pour qu'elles ne surprennent pas quand on les rencontrera. Disons une fois pour toutes qu'elles ne doivent être regardées que comme une manière abrégée d'écrire, qu'on a à chercher la limite d'une puissance dont le degré tend vers zéro, d'une quantité qui croît indéfiniment. Mais sous ce point de vue encore elle est défectueuse, puisqu'elle n'apprend rien sur la dépendance de cette quantité et de son exposant, et que cette dépendance est un élément essentiel de la question.

Revenant à l'expression $x^{\frac{1}{x}}$, nous en prendrons le logarithme dans une base quelconque; il sera $\frac{\log x}{x}$, et, comme sa limite est zéro, celle de $x^{\frac{1}{x}}$ sera l'unité.

260. *Limite de $x^x$ quand $x$ tend vers zéro.* — Posant

$$x = \frac{1}{y},$$

$y$ croîtra indéfiniment. On aura ainsi

$$x^x = \frac{1}{y^{\frac{1}{y}}},$$

et, comme il vient d'être démontré que $y^{\frac{1}{y}}$ a pour limite 1, $x^x$ aura aussi l'unité pour limite.

# CHAPITRE XXXII.

## DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS $(1+x)^m$ ET $\log(1+x)$.

**261.** La puissance $m^{\text{ième}}$ d'un binôme quelconque $a+z$ se ramène immédiatement à celle de $1+x$, en posant

$$z = ax,$$

d'où résulte

$$(a+z)^m = a^m(1+x)^m.$$

Il suffit donc, pour connaître le développement en série d'une puissance de degré quelconque d'un binôme, de le déterminer dans le cas où le premier terme est l'unité, ce qui introduit quelques simplifications.

Lorsque $m$ est entier et positif, on a

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + x^m.$$

Cette formule a été étendue par Newton au cas où $m$ est quelconque, sans démonstration rigoureuse. Euler en a donné une très-ingénieuse, qui laissait encore du côté de la rigueur quelques lacunes qu'il a été facile de combler.

Euler, au lieu de chercher à développer $(1+x)^m$, part au contraire de la série

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots,$$

dans laquelle il suppose $m$ et $x$ quelconques, et se propose de déterminer la fonction de $x$ et de $m$ qui exprime la limite de sa somme.

Mais d'abord il faut s'assurer s'il y a une limite. Or le rapport d'un terme au précédent étant exprimé généralement par $\frac{m-n}{n+1}x$, dont la limite est $-x$ quand $n$ croît indéfiniment, la série serait divergente si $x$ était plus grand que l'unité en valeur absolue. Il faut donc se borner à chercher la valeur de la série quand $m$ est quelconque, et $x$ plus petit que l'unité en valeur absolue. Désignons par $\varphi(m)$ cette limite, c'est-à-dire posons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(m) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}x^p + \ldots; \end{aligned}\right.$$

cette fonction $\varphi(m)$ renferme bien $x$, mais nous ne le mettons pas en évidence, parce que nous ne nous proposons de faire varier que $m$.

Donnant à $m$ une autre valeur différente quelconque $n$, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(n) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}x^p. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, Euler multiplie les deux séries, et observe que les réductions se feront de la même manière, quels que soient $m$ et $n$; et comme dans le cas de $m$ et $n$ entiers et positifs les séries représentent $(1+x)^m$ et $(1+x)^n$ et leur produit, $(1+x)^{m+n}$, les coefficients des différentes puissances de $x$ dans ce produit renfermeront $(m+n)$ de la même manière que (1) et (2) renferment $m$ et $n$. D'où il conclut que la forme du produit sera $\varphi(m+n)$, quels que soient $m$ et $n$.

Ce raisonnement est insuffisant, mais il a conduit Euler à une conséquence juste, exprimée par l'équation

$$(3)\qquad \varphi(m)\varphi(n) = \varphi(m+n).$$

Mais il est facile de la démontrer rigoureusement. En effet, si des séries (1), (2) on en déduit une troisième, comme il a été dit (Chap. XXX, n° 246), le terme en $x^p$ y aura pour coefficient l'expression

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2\ldots p-1}\frac{n}{1}+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p},$$

et l'on sait que, quels que soient $m$ et $n$, cette somme est égale à

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-p+1)}{1.2\ldots p},$$

c'est-à-dire au coefficient du terme en $x^p$ de (1), dans lequel on change $m$ en $m+n$.

En effet, quand $m$ et $n$ désignent des nombres entiers plus grands que $p$, cette somme n'est autre chose qu'une décomposition du nombre exact des combinaisons que $m+n$ objets peuvent donner en les prenant $p$ à $p$. Cette égalité étant ainsi démontrée, pour toutes les valeurs entières de $m$ et $n$ qui surpassent le nombre $p$, il s'ensuit (Chap. XVII) que ces deux fonctions entières de $m$ et $n$ sont identiques, c'est-à-dire composées des mêmes termes en $m$ et $n$, quels que soient $m$, $n$ et $p$.

La troisième série n'est donc autre chose que $\varphi(m+n)$. Mais comme on a démontré (n° 234) que par le procédé qui l'a produit on doit trouver $\varphi(m)\,\varphi(n)$, on en conclut rigoureusement l'équation (3).

De cette équation Euler a déduit, comme nous l'avons fait (Chap. XXIX), $k$ désignant un nombre entier positif quelconque,

$$(4)\qquad \varphi(m)^k=\varphi(km).$$

Cela posé, si $m$ est une fraction positive quelconque $\frac{q}{r}$,

l'équation (4) donnera, en faisant $k = r$,

$$\varphi(m)^r = \varphi(mr) = \varphi(q).$$

Et comme $q$ est entier, on a

$$\varphi(q) = (1 + x)^q,$$

d'où

$$\varphi(m)^r = (1 + x)^q,$$

et, par suite,

$$\varphi(m) = (1 + x)^{\frac{q}{r}} = (1 + x)^m.$$

D'où il résulte que le développement (1) est celui de $(1 + x)^m$ quand $m$ est un nombre positif quelconque.

Supposant ensuite $m$ négatif, et prenant $n = -m$, l'équation (3) donne

$$\varphi(m)\,\varphi(-m) = \varphi(0).$$

Or, quand $m = 0$, la fonction $\varphi$ devient (1). On a donc

$$\varphi(m)\,\varphi(-m) = 1,$$

d'où

$$\varphi(m) = \frac{1}{\varphi(-m)};$$

et, comme $-m$ est positif, on a

$$\varphi(-m) = (1 + x)^{-m},$$

d'où

$$\varphi(m) = (1 + x)^m.$$

D'où il conclut que, quelque valeur réelle qu'on donne à $m$, on a

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} (1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et

$$(a+z)^m = a^m + ma^{m-1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}z^2 \ldots.$$

Telle est, avec les légères modifications que nous avons indiquées, la démonstration donnée par Euler, de la formule qui donne dans tous les cas le développement de la puissance $m$ d'un binôme, suivant les puissances ascendantes du plus petit de ses deux termes.

### DÉVELOPPEMENT DE $\log(1+x)$.

262. Il est facile de déduire ce développement de celui de $(1+x)^m$ d'après la formule donnée par Euler, et que nous avons démontrée précédemment, savoir :

$$\lim \frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha} = l(1+\alpha),$$

quand $m$ tend vers zéro, le logarithme étant pris dans la base de Neper. En effet, nous avons

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots,$$

quel que soit $x$; d'où

$$\frac{(1+x)^m - 1}{m} = x + \frac{m-1}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1.2\ldots n}x^n + \ldots.$$

Faisant tendre $m$ vers zéro, le premier membre a pour limite

$$l(1+x);$$

et celle du second est

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \pm \ldots.$$

Donc

$$(6)\quad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^n}{n} \pm \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots.$$

Tel est le développement du logarithme de $(1+x)$ dans la base $e$. Mais il ne faut pas oublier que la formule d'où il a été tiré n'étant exacte que quand $x$ est compris entre $+1$ et $-1$, il sera assujetti lui-même à cette condition.

263. La formule (6) ne serait pas propre au calcul des logarithmes de tous les nombres, puisqu'elle exige que $1+x$ soit compris entre 0 et 2. Mais Euler en a déduit une autre au moyen de laquelle ces calculs sont possibles.

Changeant d'abord $x$ en $-x$ dans (6) et retranchant les deux équations, on obtient

$$l(1+x) - l(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right),$$

ou

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right),$$

série très-convergente si $x$ est très-petit.

Si maintenant on pose

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{z},$$

on en tirera

$$x = \frac{1}{2z+1},$$

et l'équation précédente deviendra

$$(7)\quad \left\{ l(z+1) - lz = 2\left[\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \ldots\right],\right.$$

série d'autant plus convergente que $z$ sera plus grand. Elle

exprime la différence des logarithmes de deux nombres différant d'une unité. Elle fera donc connaître successivement les logarithmes de tous les nombres entiers. En partant de $z = 1$, elle donnera $l2$ par une série déjà assez convergente, puisque ses termes sont au-dessous de ceux de la progression dont la raison serait $\frac{1}{9}$ et le premier terme $\frac{1}{3}$. La convergence augmente rapidement avec $z$.

On formerait donc ainsi une Table de logarithmes dont la base serait $e$. Pour passer à une autre base $a$, il faudrait diviser ceux-ci par $la$. Si, par exemple, on veut construire une Table dont la base serait la même que celle du système de numération, ce qui est très-important pour la facilité des calculs, il faudrait diviser les logarithmes calculés au moyen de la formule (7) par $l10$ ou $l2 + l5$, dont la valeur est

$$l10 = 2,3025\,8509\,2994\ldots,$$

ou encore les multiplier par $\frac{1}{l10}$, qu'on appelle le *module*, et dont la valeur est

$$\frac{1}{l10} = 0,434\,294\,482\ldots.$$

Nous nous bornerons à ces premières indications sur la construction des Tables. On a trouvé des procédés, non pas plus sûrs, mais plus rapides, pour arriver au même résultat; ce ne serait pas ici qu'ils pourraient être exposés, et d'ailleurs ces détails spéciaux nous écarteraient un peu trop de notre objet.

264. Nous pourrions traiter beaucoup d'autres questions importantes relatives à la science pure des nombres ; mais les applications de ces théories à la Géométrie en augmentent tellement l'intérêt, et contribuent tellement à en

faire sentir l'utilité, qu'on se priverait d'un grand avantage en restant trop longtemps dans l'abstraction pure. Il y a plus : beaucoup de ces théories sont dues à des questions de Géométrie, pour la solution desquelles elles ont été inventées, et la marche de l'esprit humain serait méconnue si l'on séparait trop les méthodes des problèmes qui les ont fait naître. Nous croyons donc nécessaire de passer maintenant à l'étude rapide de la Géométrie, pour arriver le plus tôt possible à l'application mutuelle de ces deux sciences, qui a tant augmenté la puissance de l'une et de l'autre.

# SCIENCE DE L'ÉTENDUE.

# SCIENCE DE L'ÉTENDUE.

## CHAPITRE PREMIER.

### ÉTABLISSEMENT DES PREMIÈRES PROPOSITIONS DE LA GÉOMÉTRIE.

265. La Géométrie est la science de l'étendue, c'est-à-dire l'ensemble des rapports nécessaires qui dérivent de la nature de l'étendue.

Cette nature est déterminée pour nous par un petit nombre de notions premières que nous acquérons par l'observation et la réflexion. Nous avons indiqué les principales, nous réservant d'en introduire quelquefois de nouvelles, lorsqu'elles seront naturellement amenées par le développement de la science.

Nous avons distingué les différentes espèces de grandeurs qui se présentent dans la considération de l'étendue ; ce sont : les solides, les surfaces qui les terminent, les lignes ou limites de portions de ces surfaces, les angles.

Un des principaux objets de la science est la mesure de ces grandeurs, ou la détermination de leurs rapports numériques avec une grandeur de leur espèce, prise pour unité ; en d'autres termes, c'est l'expression de ces différentes grandeurs en nombres.

Mais il ne faut pas croire que la Géométrie n'ait pas d'autre objet, et que toutes les propositions doivent converger vers ce but unique ; et les auteurs qui en donnent cette définition la restreignent beaucoup trop. On peut bien composer des ouvrages où l'on ne se propose pas autre chose ; mais la science en elle-même est indépendante des points de vue plus ou moins limités sous lesquels il convient à tel homme de l'envisager. Elle comprend tous les rapports résultant de la nature de l'étendue. La mesure des grandeurs comprend quelques-uns de ces rapports, mais il en est une infinité d'autres qui n'y ont pas trait directement. Et ces derniers peuvent y être indirectement utiles, en offrant des moyens nouveaux de comparaison, qu'on n'a peut-être pas encore aperçus, et qu'on reconnaîtra un jour. Ils peuvent aussi servir dans les applications de la Géométrie à d'autres sciences, comme on l'a souvent reconnu, longtemps après leur découverte.

Il ne faut donc négliger aucune vérité intéressante par elle-même, indépendamment de toute utilité pratique. Outre le plaisir que l'on éprouve toujours à apprendre quelque chose de nouveau, il y a l'avantage incontestable d'accroître ses facultés intellectuelles par l'usage bien dirigé qu'on en fait ; et si l'on pouvait suivre l'effet de toutes les influences sur le développement de l'esprit, on reconnaîtrait souvent la part que les méditations de la science abstraite pourraient revendiquer dans le talent du penseur, de l'orateur ou de l'écrivain.

266. Le nombre des vérités géométriques distinctes ne peut être assigné, et l'on ne pourra jamais avoir la prétention de connaître la science entière. Chaque vérité nouvelle peut donner lieu à de nouvelles déductions, et accroître le nombre des combinaisons propres à constituer de nouvelles questions ; de sorte que l'on ne conçoit pas

la possibilité d'épuiser jamais la matière. Mais les Traités élémentaires ne doivent pas même avoir pour objet de faire connaître tout ce que l'on sait; ils doivent faire connaître, en partant des notions premières, les propositions dont l'application est la plus fréquente, et les méthodes les plus générales pour la résolution des diverses questions que la science peut présenter. Le cadre dans lequel de pareils ouvrages doivent être renfermés n'est donc pas bien déterminé; ils sont le commencement de la science, et l'on peut les arrêter où l'on veut. Ce qui vient après se désigne quelquefois sous le nom de *Géométrie transcendante,* de *Géométrie supérieure.* Ces dénominations disparaîtront sans doute, parce qu'elles n'expriment réellement rien; elles s'appliquent seulement aux théories qui suivent celles auxquelles quelques auteurs ont limité les ouvrages qu'ils ont appelés *Éléments.*

### DES PREMIÈRES PROPOSITIONS DE LA GÉOMÉTRIE.

267. Nous avons dit que souvent des vérités se présentent à nous sans être prévues ni cherchées; soit comme déductions d'autres vérités connues, soit comme pressenties par des analogies vagues, ou par le sentiment des situations ou des formes. C'est surtout dans les commencements de la science que ce sentiment conduit à des connaissances qui, pour la plupart des hommes, n'ont pas besoin de démonstration en règle.

Qui doutera, par exemple, que dans un plan on puisse, en un point d'une droite, en mener une autre qui ne soit pas plus inclinée sur elle d'un côté que de l'autre, et que cette seconde soit unique? Qui ne sentira que, d'un point extérieur à la première droite, on peut en abaisser une qui soit également inclinée des deux côtés sur elle; que cette

perpendiculaire est unique, et plus courte que toute oblique ; que les obliques vont en croissant, à mesure qu'elles s'éloignent de la perpendiculaire, et sont de même longueur de part et d'autre, à égale distance de celle-ci ; que dans un triangle qui a deux côtés égaux, les angles opposés le sont aussi, et réciproquement? A quel enfant ne s'est pas présentée l'idée de deux lignes droites, partout également distantes, et, par conséquent, ne pouvant se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge? et cette idée n'était-elle pas accompagnée invinciblement du sentiment que, par un même point, on n'en peut mener qu'une seule qui soit dans cette situation par rapport à une droite donnée? Qui n'est pas porté à admettre la possibilité qu'un quadrilatère ait ses quatre angles droits, et qui n'en conclurait la possibilité de comparer les surfaces de deux pareilles figures, en les décomposant en carrés égaux?...

Il serait trop long d'énumérer toutes les propositions qui se présentent d'elles-mêmes à l'esprit, et dont la vérité ne paraît douteuse à personne au premier abord, mais cependant qu'on sent qu'il faut établir plus solidement, quand on a reconnu par sa propre expérience qu'une manière aussi légère d'accepter des vérités conduisait quelquefois à des erreurs. Alors les propositions admises, ou seulement soupçonnées, ont été prises comme des théorèmes à démontrer, et placées au point de départ de la science, en s'assujettissant à la condition que chacune d'elles ne s'appuie que sur celles qui la précèdent.

Cette condition, relative à l'ordre dans lequel les propositions sont disposées, doit être observée jusqu'à la fin de l'ouvrage où une science quelconque est exposée, afin qu'on soit bien assuré que chacune de ces propositions est la conséquence des notions premières admises comme évidentes, et de vérités démontrées ; et que c'est dans cet ordre qu'il faut les étudier, si l'on veut être sûr que, pour com-

prendre chaque démonstration, on n'aura besoin d'avoir recours qu'à ce que l'on sait déjà. Et ce que nous disons là de l'exposition d'une science à partir des premiers principes doit s'entendre de toute théorie composée de propositions dépendant les unes des autres, et fondée sur les éléments admis généralement, et qu'il n'est plus nécessaire de discuter.

268. Dans quelques-unes des propositions que nous venons d'énoncer, on a à démontrer l'égalité de deux lignes droites. Cette question se présente très-fréquemment, soit comme but, soit comme intermédiaire. Le moyen qu'on emploie le plus ordinairement à cet effet consiste à faire en sorte que ces lignes soient des côtés de triangles dont on peut démontrer l'égalité, indépendamment des côtés en question, et d'après les données immédiates ou leurs conséquences. Aussi les conditions d'égalité des triangles font partie des premières questions dont on s'occupe après l'établissement des axiomes. La superposition, qui est le moyen général de s'assurer de l'égalité des quantités géométriques, fait reconnaître immédiatement que deux triangles sont égaux quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux ; ou encore quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux. Il est un troisième cas d'égalité qui ne peut se démontrer par la superposition immédiate : c'est celui où les deux triangles ont les trois côtés respectivement égaux. On ne peut alors faire coïncider qu'un seul côté avec son homologue ; et comme on n'a pas de donnée sur les angles, la direction des autres côtés reste incertaine, et la possibilité de leur superposition n'est pas établie. On est obligé de recourir à d'autres propositions intermédiaires, et d'arriver par un détour à la démonstration de ce troisième cas, qui n'est pas d'une moindre utilité que les deux autres. Ces intermédiaires,

inattaquables dans la Géométrie d'Euclide, sont différents dans la plupart des Traités modernes, où l'on définit la ligne droite *le plus court chemin d'un point à un autre.*

Nous avons donné les raisons pour lesquelles nous ne regardions pas cette définition comme acceptable; et nous rejetons, par conséquent, toute démonstration fondée sur elle. Les Traités dont nous venons de parler sont donc, à notre avis, entièrement défectueux.

Mais cette importante propriété de la ligne droite, n'étant pas prise par Euclide comme définition, a dû être démontrée ou acceptée comme axiome. Heureusement ce grand géomètre n'a pas été obligé de la placer dans cette dernière catégorie, et il l'a déduite de propositions fondées sur les notions premières dont nous avons parlé précédemment.

L'importance qu'il y a à établir clairement et sans réticence les premières vérités déduites des axiomes, et à ne laisser aucune obscurité à l'entrée de la science, nous engage à faire connaître avec quelque détail l'ordre et l'enchaînement des propositions par lesquelles commencent les *Éléments d'Euclide,* et ceux qui paraissent les avoir remplacés chez nous, je veux dire les *Éléments de Legendre.*

### PREMIERS THÉORÈMES DANS LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

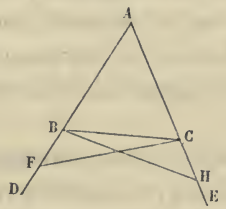
269. *Deux triangles sont égaux, quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

La démonstration se fait immédiatement par la superposition.

270. *Dans les triangles isoscèles, les angles à la base sont égaux, et, si on prolonge les côtés égaux, les angles sous la base seront aussi égaux.*

Soient AB, AC les deux côtés égaux du triangle ABC; BD, CE leurs prolongements (*fig.* 1). Prenant BF = CH, les deux triangles ACF, ABH seront égaux, comme ayant un angle égal A compris entre côtés égaux chacun à chacun;

Fig. 1.




donc BH=CF, et les angles H et F seront aussi égaux. Il en résulte que les triangles BCH, BCF seront égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés respectivement égaux; et, par conséquent, les angles BCF, CBH le seront, ainsi que BCH, CBF. Cette dernière égalité prouve la seconde partie du théorème énoncé; et la précédente en prouve la première, parce que, les deux angles égaux qu'on y considère étant retranchés respectivement des deux angles ACF, ABH qui sont égaux comme homologues dans les triangles égaux ACF, ABH, les restes ABC, ACB, qui sont les angles à la base du triangle ABC, seront égaux.

Telle est la démonstration d'Euclide. On s'étonnera peut-être que de l'égalité des angles de la base avec les prolongements des côtés il n'ait pas conclu l'égalité des angles adjacents, qui sont ceux du triangle. Cela tient à ce qu'il a placé un peu plus loin les considérations relatives aux angles adjacents formés par des droites qui se rencontrent; au reste, sa démonstration n'en est pas beaucoup allongée.

Mais on peut faire une remarque plus importante sur cette démonstration. Euclide n'aurait eu besoin d'aucune construction, si, au lieu des points F, H, il avait simplement

considéré B et C. Les deux triangles dont il démontrait d'abord l'égalité auraient été ABC, ACB, c'est-à-dire le même triangle; les angles homologues dont il concluait l'égalité, au lieu d'être ACF, ABH, auraient été ACB, ABC, c'est-à-dire les angles mêmes du triangle. Quant aux angles formés par les prolongements, leur égalité résulte de celle de leurs adjacents, comme on le reconnaît immédiatement par la superposition des figures, et je pense qu'Euclide aurait pu placer cette dernière proposition dès le commencement.

271. *Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles seront égaux.*

Euclide emploie ici la réduction à l'absurde. Si les deux côtés AB, AC, opposés aux angles égaux B et C du triangle ABC (*fig.* 2), ne sont pas égaux, l'un sera plus grand que l'autre. Soit AB le plus grand; prenant BD=AC,

Fig. 2.

les deux triangles DBC, ACB auront un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun : car l'angle B du premier est compris entre les deux côtés BD, BC, qui sont respectivement égaux aux côtés CA, CB qui comprennent l'angle égal ACB dans le second. Ces deux triangles devraient donc être égaux, ce qui est absurde, puisque l'un fait partie de l'autre : la supposition d'où l'on est parti est donc fausse, et, par conséquent, les côtés AB, AC sont égaux.

Nous ferons ici la même remarque que pour la démons-

tration précédente. Il eût été beaucoup plus simple de considérer encore le triangle ABC sous deux aspects différents : 1° comme ayant le côté BC adjacent aux deux angles B, C; 2° comme ayant le côté égal CB adjacent aux angles C, B respectivement égaux à B, C. Détachant par la pensée le triangle ACB, on le fera coïncider avec ABC, en appliquant son côté CB sur l'égal BC, et alors le côté CA coïncidera avec BA; ils sont donc égaux.

Mais cette démonstration suppose la proposition que deux triangles sont superposables, quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; et Euclide l'a reportée plus loin, quand il était si facile de l'établir immédiatement, comme l'a fait Legendre. Il ne faut pas méconnaître, cependant, qu'il a eu un motif pour placer ce théorème après quelques autres : il lui a donné une plus grande extension, en considérant deux cas : celui où le côté égal est adjacent aux deux angles égaux, comme nous l'avons supposé, et celui où il est opposé à l'un de ces angles; et ce dernier ne pouvait se démontrer par une simple superposition.

272. *Deux points étant donnés sur une droite, il ne peut exister d'un même côté de cette droite deux points qui, joints aux deux premiers, donnent des longueurs respectivement égales.*

Euclide emploie encore ici la méthode de réduction à l'absurde. Il suppose qu'il existe deux points dont les distances aux deux autres soient respectivement égales, et discute la question dans les deux conditions où ils peuvent se trouver d'un même côté de la droite donnée. Les triangles isoscèles auxquels cette hypothèse donne naissance donneraient lieu à des égalités d'angles qui amènent facilement à des absurdités; d'où il conclut l'absurdité de l'hypothèse.

Cette proposition le conduit immédiatement à la suivante, qui constitue le troisième cas d'égalité des triangles.

273. *Deux triangles sont égaux, quand ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

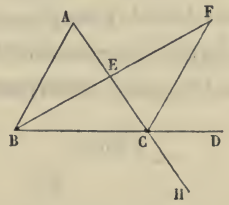
274. *Lorsque deux droites se coupent, la somme des angles adjacents est égale à deux droits, et réciproquement : les angles opposés sont égaux.*

Euclide n'a pas cru devoir démontrer que tous les angles droits sont égaux. Il a regardé sans doute comme évident qu'en un point d'une ligne située dans un plan donné, on n'en peut mener qu'une seule dans ce même plan, qui fasse des angles égaux avec les deux côtés de cette ligne ; ou, en d'autres termes, que, dans un plan donné, on ne peut concevoir qu'une seule perpendiculaire à une droite en un de ses points. Si maintenant on considère deux droites différentes, et sur chacune une perpendiculaire, les angles droits formés par les deux premières seront évidemment les mêmes que ceux que forment les deux autres ; car si l'on fait coïncider le point de rencontre de celles-ci avec le point de rencontre des premières, qu'ensuite on applique l'une sur l'autre les deux droites sur lesquelles sont élevées les perpendiculaires, ces dernières se confondront, puisqu'on ne peut, sur une même droite, élever qu'une seule perpendiculaire en un point donné : les angles droits de l'un des systèmes sont donc égaux à ceux de l'autre. Ces raisons, développées dans certains Traités avec un peu de prolixité, Euclide n'a pas jugé nécessaire de les mentionner, et il a admis comme évidente l'égalité de tous les angles formés par des droites perpendiculaires.

275. *Si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur sera plus grand que chacun des intérieurs opposés.*

Soit le triangle ABC (*fig.* 3), CD le prolongement de BC; joignons le point B au milieu E de AC, et prolongeons BE de EF égal à BE; les triangles CEF, ABE seront égaux,

Fig. 3.



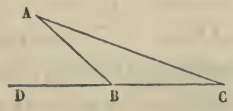

comme ayant un angle égal en E compris entre côtés respectivement égaux; les angles A et ACF seront donc égaux : mais ce dernier est plus petit que ACD, puisque le point F est dans l'angle ACD, vu que la ligne BE, prolongée indéfiniment, ne peut venir recouper la droite BD, avec laquelle elle a déjà un point commun B : donc l'angle intérieur A, opposé au côté prolongé, est aussi plus petit que l'angle extérieur ACD : ce qu'il fallait prouver.

Quant au second angle ABC, qui est adjacent à la base, on fera une démonstration semblable, en prolongeant le côté AC, auquel il est opposé, et considérant l'angle extérieur BCH; l'angle ABC sera donc plus petit que BCH, et, par conséquent, que ACD, qui lui est égal comme opposé au sommet.

276. *Dans tout triangle, la somme de deux angles quelconques est moindre que deux droits.*

Soient les deux angles B, C du triangle ABC (*fig.* 4);

Fig. 4.



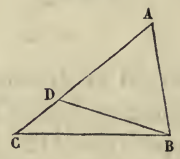

prolongeons CB, les deux angles adjacents ABD et ABC ont

pour somme deux droits, mais l'extérieur ABD est plus grand que C; donc la somme des deux angles B et C du triangle est moindre que deux droits.

277. *Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, l'angle opposé au plus grand sera le plus grand.*

Soit AC > AB (*fig.* 5); prenons AD = AB, le triangle ABD sera isoscèle, et, par conséquent, les angles ABD,

Fig. 5.




ADB seront égaux. Mais l'angle ABC est plus grand que ABD; et ADB, comme extérieur au triangle BDC, est plus grand que C : donc, à plus forte raison, on a ABC > C. Ce qu'il fallait démontrer.

278. *Si deux angles d'un triangle sont inégaux, le côté opposé au plus grand sera le plus grand.*

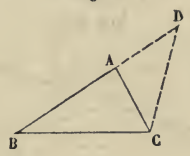
Euclide emploie encore ici la méthode de réduction à l'absurde, et suppose que la contradictoire de la proposition énoncée soit vraie, c'est-à-dire que le côté opposé au plus grand des deux angles n'est pas plus grand que l'autre. Il y aura alors deux cas possibles : ou il sera plus petit que cet autre, ou il lui sera égal. Or, s'il était plus petit, l'angle opposé serait le plus petit des deux, d'après la proposition précédente, et cela est contraire à l'hypothèse. S'il était égal, les deux angles seraient égaux, ce qui est encore contraire à l'hypothèse. Donc, si la contradictoire était vraie, elle conduirait nécessairement à des conséquences fausses; donc elle n'est pas vraie, et, par conséquent, la proposée l'est.

Nous donnons avec quelque détail cette démonstration bien facile, pour mettre en évidence la méthode générale dont elle est une application.

279. *Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

Soient le triangle ABC (*fig.* 6); BC l'un quelconque de ses côtés; prolongeons BA de AD = AC; le triangle CAD

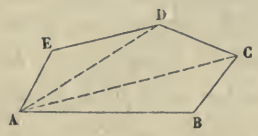
Fig. 6.




sera isoscèle, et les angles D et ACD seront égaux; il en résultera BCD > D, et, par conséquent, dans le triangle BCD, le côté BD sera plus grand que BC, comme étant opposé à un plus grand angle. Mais BD = BA + AC. Donc la somme des deux côtés BA, AC du triangle ABC est plus grande que le troisième : ce qu'on se proposait de démontrer.

280. *Corollaire.* — Il résulte de là qu'une ligne droite est plus courte que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités. Soient, en effet (*fig.* 7), la droite AB et la ligne brisée AEDCB. Menons les diagonales AC, AD. D'après ce

Fig. 7.

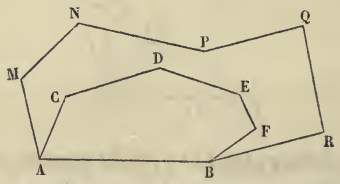



qui vient d'être démontré, AB sera plus petit que BC + AC; AC sera plus petit que DC + AD, et AD plus petit que ED + EA. Donc AB sera plus petit que BC + CD + DE + EA.

Donc la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre, en ne considérant toutefois que des routes composées de lignes droites en nombre quelconque. Cette proposition se généralisera plus tard, lorsque nous parlerons des lignes courbes.

281. *Autre corollaire.* — Il résulte de là que, si d'un point A à un point B (*fig.* 8), on conçoit dans un même plan une ligne brisée ACDEFB, composée d'un nombre quel-

Fig. 8.




conque de côtés rectilignes, tel qu'un quelconque d'entre eux prolongé ne pénètre pas dans l'intérieur du polygone fermé par AB, la somme des côtés composant cette ligne brisée sera moindre que celle des côtés de la ligne brisée AMNPQRB, terminée aux mêmes extrémités A, B, et située complétement en dehors du polygone ACDEFB, qui se trouve enveloppé.

Nous n'en rapporterons pas la démonstration, qui découle naturellement de la proposition précédente.

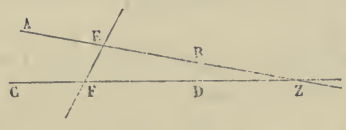
282. *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et que l'angle compris entre les premiers soit plus grand que celui qui est compris par les seconds, le troisième côté du premier sera plus grand que le troisième côté du second; et réciproquement.*

283. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun et un côté égal adjacent à ces deux angles, ou opposé à un angle égal.*

284. *Si une droite tombant sur deux autres droites fait des angles alternes égaux, ces deux droites seront parallèles.*

Soient les deux droites AB, CD, et une troisième EF faisant avec elles les angles égaux AEF, EFD (*fig.* 9). Si AB et CD se rencontraient, par exemple, en Z, l'angle AEF,

Fig. 9.




extérieur au triangle EFZ, devrait être plus grand que l'angle intérieur EFZ; ce qui serait contre l'hypothèse. Les deux droites ne peuvent donc se rencontrer, et, comme elles sont supposées dans le même plan, elles sont parallèles.

On pourrait énoncer d'une autre manière les données de cette question, et dire que : lorsque la somme des angles intérieurs d'un même côté est égale à deux droits, les lignes sont parallèles.

285. *Postulatum d'Euclide.* — Nous venons de démontrer que, lorsqu'une droite tombant sur deux autres dans un même plan fait d'un même côté la somme des angles intérieurs égale à deux droits, les deux lignes sont parallèles. Or Euclide demande qu'on accorde comme évident que, si cette somme est différente de deux droits, les deux lignes se rencontrent, du côté où elle est moindre.

On voit que c'est comme si l'on admettait que, par un point, on ne peut mener qu'une seule droite parallèle à une droite donnée. C'est en cela que consiste réellement ce célèbre *postulatum.*

286. *Une droite qui rencontre deux parallèles fait avec elles des angles intérieurs dont la somme est égale à*

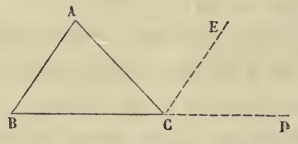
*deux droits; ou, en d'autres termes, les angles alternes sont égaux.*

En effet, si cette somme était différente de deux droits, les lignes se rencontreraient, d'après le *postulatum.* Or c'est contre l'hypothèse. Donc elle n'est pas différente de deux droits.

287. *La somme des trois angles de tout triangle est égale à deux droits.*

Soit un triangle quelconque ABC (*fig.* 10); prolongeons un de ses côtés BC, et menons dans l'angle ACD, qui est

Fig. 10.




plus grand que A, une ligne CE faisant un angle ACE égal à A; elle sera parallèle à BA, d'après une proposition précédente. Donc les angles ECD, ABC seront égaux. Ce qui prouve d'abord que l'angle extérieur est toujours égal à la somme des deux intérieurs opposés; en second lieu, en ajoutant le troisième angle ACB, la somme des trois angles du triangle sera égale à ACD + ACB ou à deux angles droits. C. Q. F. D.

Cette proposition conduit immédiatement à la somme des angles d'un polygone, en le décomposant en triangles.

288. *Dans tout parallélogramme les côtés opposés sont égaux, les angles opposés sont égaux; les diagonales le partagent chacune en deux triangles égaux, et se partagent mutuellement en deux parties égales.*

289. *Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont équivalents.*

*Et les triangles seront aussi équivalents dans les mêmes conditions, parce qu'ils seront les moitiés de parallélogrammes équivalents.*

Telles sont les principales propositions qui composent le premier Livre d'Euclide. On peut dire de la plupart d'entre elles qu'on en sent l'exactitude aussitôt qu'elles sont énoncées, et qu'elles ont dû se présenter d'elles-mêmes à ceux qui se sont occupés de figures tracées sur un plan. Mais la démonstration rigoureuse était nécessaire, et, sous ce rapport, le livre des *Éléments* ne laisse rien à désirer. Il a servi de modèle à tous ceux qui ont écrit sur cette matière, et sera toujours considéré comme un des plus beaux monuments de l'antiquité.

Comparons-le maintenant à l'Ouvrage qui, depuis près d'un siècle, est la base de l'enseignement de la Géométrie en France; et voyons si, sous le rapport des notions premières et de leurs conséquences immédiates, il y a eu progrès d'Euclide à Legendre.

### DES PREMIÈRES PROPOSITIONS DE LA GÉOMÉTRIE DE LEGENDRE.

290. Legendre définit la ligne droite *le plus court chemin d'un point à un autre.* Il admet qu'on n'en peut mener qu'une seule entre deux points donnés, mais il laisse incertain si elle peut avoir plusieurs prolongements; d'autres auteurs estimés admettent l'idée plus complète, que par les deux mêmes points il ne peut passer qu'une seule ligne droite indéfinie.

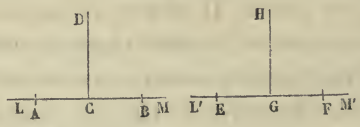
Nous ne reproduirons pas les raisons qui nous ont fait rejeter cette définition, et nous devons, en conséquence, regarder les principes de la Géométrie comme mal établis par Legendre.

L'ordre et la démonstration des premiers théorèmes ne sont pas les mêmes que dans Euclide, qui ne pouvait admettre sans le prouver qu'un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres. Cette proposition, qui est pour Legendre une conséquence de sa définition de la ligne droite, lui permet de donner un autre tour aux démonstrations, sans qu'il en résulte cependant aucune réelle simplification.

La première chose qu'il cherche à démontrer, et qu'Euclide admettait comme évidente, est l'égalité de tous les angles droits. Les raisonnements y sont un peu embarrassés et sont suivis avec quelque peine par les élèves, auxquels ces formes ne sont pas encore familières; mais on peut y faire un reproche plus sérieux, et les premières vérités doivent être établies avec tant de rigueur et de clarté, que nous ne croyons pas pouvoir nous dispenser d'en faire sentir le défaut.

Il considère deux droites CD, GH, respectivement perpendiculaires sur les lignes LM, L'M' (*fig.* 11 et 12), et il se propose de démontrer que les angles droits formés en C sont égaux à ceux dont le sommet est en G. Pour cela, dit-il, prenez les quatre distances égales CA, CB, GE, GF;

Fig. 11 et 12.




la distance AB sera égale à la distance EF, et l'on pourra placer la ligne EF sur AB, de manière que le point E tombe en A et le point F en B. Ces deux lignes ainsi posées coïncideront complétement l'une avec l'autre; car, sans cela, il y aurait deux lignes droites de A en B, ce qui

est impossible : donc le point G, milieu de EF, tombera sur le point C, milieu de AB.

Il semble, au premier abord, qu'il n'y ait aucune difficulté à faire à ces constructions et aux conséquences qui en ont été tirées ; mais, avec un peu de réflexion, on reconnaîtra que celui qui n'admet pas qu'une droite ne puisse avoir qu'un seul prolongement indéfini ne pourrait admettre les coïncidences telles qu'elles viennent d'être indiquées.

En effet, il prend quatre longueurs égales, c'est-à-dire quatre longueurs qui pourraient coïncider deux à deux. Cela étant accepté, AC et EG peuvent bien être appliquées l'une sur l'autre, mais alors il reste douteux si le prolongement GF de EG coïncidera avec le prolongement CB de AC : dès lors, rien ne prouve que le point F coïncidera avec B, et la démonstration ne subsiste plus.

291. La seconde proposition consiste en ce que toute droite qui en rencontre une autre fait avec elle deux angles adjacents dont la somme est égale à deux angles droits. Elle est suivie de quelques corollaires sans difficulté.

292. La troisième proposition consiste en ce que deux droites indéfinies dans les deux sens, qui ont deux points communs, coïncident dans toute leur étendue.

Nous avons dit précédemment que Legendre admet bien que, d'un point à un autre, on ne peut mener qu'une ligne droite, mais non que des droites qui coïncident dans une certaine étendue ne puissent pas se séparer au delà. Il peut paraître étrange qu'il n'ait pas admis comme aussi évidente la coïncidence au delà qu'en deçà des deux points communs. Mais le désir de demander le moins de concessions possible ne fait-il pas naître des embarras d'un autre genre? Il admet la notion du plan, et il suppose que toutes les lignes qu'il trace soient dans un même plan. Il a défini

le plan : une surface telle, que si l'on joint deux de ses points par une ligne droite, et qu'on la prolonge indéfiniment dans les deux sens, tous ses points seront sur cette surface : et c'est sur cette définition qu'il se fonde au commencement de son cinquième Livre, pour prouver qu'une droite ne peut être en partie dans un plan et en partie en dehors.

Or, si l'idée qu'on a de la ligne droite autorise à penser que des droites qui ont deux points communs ne coïncident pas au delà de ces points, comment se figurer une surface telle, qu'en y prenant deux points quelconques, et faisant passer par ces points une droite pouvant donner lieu à un nombre indéfini de prolongements, tous ces prolongements seraient sur cette même surface, n'importe où l'on prendrait sur elle ces deux points. Personne n'accepterait la notion d'une surface d'après une telle définition ; et si on ne la repousse pas, c'est qu'on admet auparavant que, par deux points donnés, il ne peut passer deux droites indéfinies différentes. Or la démonstration que Legendre cherche à donner de cette proposition suppose la notion du plan : il y aurait donc cercle vicieux.

Ces raisons nous font conclure que Legendre aurait mieux fait de donner plus d'extension à son *postulatum,* et d'admettre que deux lignes droites, qui ont deux points communs, coïncident non-seulement entre ces deux points, mais dans toute leur étendue.

293. Legendre a beaucoup varié son exposition de la théorie des parallèles, cherchant toujours à se passer du *postulatum* d'Euclide. Mais ces différentes tentatives ont été sans succès ; et, jusqu'ici, on n'a rien trouvé de mieux que la théorie du géomètre grec.

Nous n'en dirons pas davantage sur les commencements de la Géométrie de Legendre ; cela suffit, je pense,

pour montrer son infériorité à l'égard de celle d'Euclide.

### COMMENT NOUS PENSONS QU'ON POURRAIT ÉTABLIR LES COMMENCEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE.

294. Nous avons montré précédemment comment la connaissance des corps nous conduisait à celle des surfaces, des lignes et des points. Parmi les lignes, nous avons distingué la droite; et, parmi les surfaces, le plan. Nous ne répéterons pas ce que nous avons dit à ce sujet.

Les notions les plus simples après les axiomes, celles qui se retrouvent à chaque instant comme intermédiaires dans le cours de presque toutes les démonstrations ou recherches quelconques, se rapportent à des points et des lignes situées dans un même plan : ce sont ces propositions élémentaires que nous allons établir dans l'ordre de déduction qui nous paraît le plus naturel.

295. *Tous les angles droits sont égaux.*

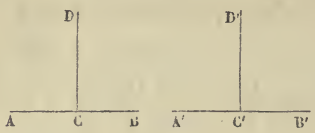
Les angles droits sont ceux que forment deux droites perpendiculaires l'une sur l'autre; et nous avons appelé *perpendiculaires* deux droites qui font deux angles adjacents égaux entre eux.

Dans un plan qui renferme une droite, on peut toujours concevoir en un point de cette droite une perpendiculaire, mais il ne peut en exister plusieurs ; car, en déplaçant la première autour du même point et dans le même plan, on augmenterait nécessairement l'un des angles primitifs et l'on diminuerait l'autre d'autant; toute autre droite que la première fait donc des angles adjacents inégaux, et, par conséquent, n'est pas perpendiculaire.

Il est facile de reconnaître maintenant que les angles droits que forment deux lignes perpendiculaires AB, CD

sont égaux à ceux que forment deux autres perpendiculaires A′B′, C′D′ (*fig.* 13 et 14). En effet, transportons le système de ces deux dernières de manière que le point C′ coïncide avec C, et la droite indéfinie A′B′ avec AB. Il suffira

Fig. 13 et 14.




pour cela, après avoir placé C′ sur C, de placer un second point quelconque de A′B′ sur la ligne AB. Cela fait, il est évident que C′D′ s'appliquera sur la droite indéfinie CD, sans quoi il y aurait en C deux perpendiculaires à la même droite AB, ce qui est impossible. Les angles droits formés par les deux premières droites ne diffèrent donc pas de ceux que forment les deux secondes.

296. *La somme des angles formés d'un même côté d'une droite indéfinie, par une ou plusieurs droites partant d'un même point de la première, est égale à deux angles droits.*

Cela résulte immédiatement de la définition que nous avons donnée de *somme d'angles*. Nous avons dit que lorsque l'on plaçait à la suite les uns des autres, et dans le même sens, un nombre quelconque d'angles ayant leurs sommets au même point, les deux côtés extrêmes étaient dits faire un angle égal à la somme de tous les autres.

D'après cela, puisque, d'après l'hypothèse de la question actuelle, les côtés extrêmes sont le prolongement l'un de l'autre, la somme de tous les angles, quel qu'en soit le nombre, est la même que s'il n'y en avait que deux, formés par la perpendiculaire à la droite indéfinie; c'est-à-dire qu'elle est égale à deux angles droits.

Lorsqu'il n'y a que deux angles, ils sont dits suppléments l'un de l'autre.

297. *Réciproquement, si la somme des angles consécutifs est égale à deux droits, les côtés extrêmes seront en ligne droite.*

Car, s'ils n'y étaient pas, en prolongeant l'un des deux et prenant ce côté au lieu du second côté extrême, la somme des angles serait changée. Or elle serait égale à deux droits; donc elle ne l'était pas d'abord, ce qui serait contraire à l'hypothèse. On ne peut donc admettre que les côtés extrêmes ne soient pas en ligne droite.

298. *Lorsque deux droites indéfinies se rencontrent, les angles opposés sont égaux.*

On appelle *opposés* les angles dont l'un est formé par les prolongements des côtés de l'autre; et leur égalité résulte de ce qu'ils ont un même angle pour supplément.

299. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, ou un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

C'est ce que la superposition fait immédiatement reconnaître.

300. *Dans un triangle isoscèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit le triangle ABC dans lequel AB = AC (*fig.* 15); concevons ce triangle retourné de manière que ces deux côtés se trouvent placés en sens inverse : on aura un triangle ACB qui aura un angle égal à A compris entre les deux côtés AC, AB égaux chacun à chacun à AB et AC. Ils seront donc superposables et l'angle ACB coïncidera avec ABC; ce qui prouve que les deux angles du triangle ABC sont égaux.

Les angles formés en dessous de la base par les prolongements des côtés AB, AC sont égaux comme suppléments d'angles égaux.

301. *Si un triangle* ABC *a deux angles égaux* B *et* C, *les côtés opposés le seront aussi.*

Cela se prouvera encore par la superposition du triangle ABC avec ce même triangle retourné.

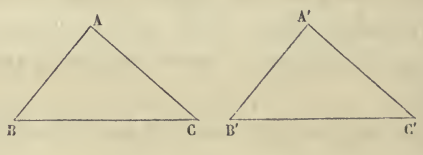
302. *Deux triangles sont égaux quand ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′ (*fig.* 15 et 16), dans lesquels on a

$$BC = B'C', \quad AB = A'B', \quad AC = A'C'.$$

Transportons le triangle A′B′C′ sur l'autre, de manière que B′C′ coïncide avec BC; il faut démontrer que le point A′

Fig. 15 et 16.



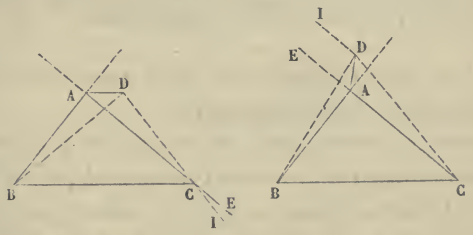

ne peut tomber autre part qu'en A, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir, d'un même côté de la ligne BC, deux points qui, joints aux deux mêmes points BC, donnent des longueurs égales chacune à chacune. Pour cela, supposons que A′ ne tombe pas sur A, il sera dans l'un des quatre angles formés par les côtés AB, AC et leurs prolongements. Soit D ce point (*fig.* 17 et 18); joignons A et D par une droite.

Puisqu'on aura, d'après l'hypothèse,

$$AB = DB \quad \text{et} \quad AC = CD,$$

les deux triangles BAD, CAD seront isoscèles, et dans chacun d'eux les angles opposés aux côtés égaux seront égaux,

Fig. 17 et 18.




ainsi que leurs suppléments : on aura donc

$$BAD = BDA \quad \text{et} \quad DAE = IDA.$$

Or ces deux égalités sont incompatibles, puisque l'on a évidemment

$$BAD > DAE,$$

tandis que l'égal de BAD ou BDA est plus petit que IDA, qui est égal à DAE.

L'hypothèse d'où l'on est parti est donc fausse, et le point A′ ne peut tomber qu'en A : ce qui prouve que les deux triangles ABC, A′B′C′ sont égaux.

303. *Si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur sera plus grand que chacun des angles intérieurs opposés.*

Il faudrait reproduire ici la démonstration d'Euclide que nous avons fait connaître précédemment. Et il en serait de même des suivantes, que nous nous contenterons d'indiquer, mais que nous devons mentionner pour que l'enchaînement des propositions soit marqué :

304. *La somme de deux angles quelconques d'un triangle est moindre que deux droits.*

305. *Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, au plus grand sera opposé le plus grand angle.*

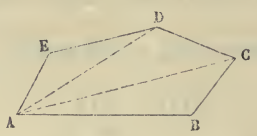
306. *Si deux angles d'un triangle sont inégaux, au plus grand sera opposé le plus grand côté.*

307. *Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

Un corollaire immédiat de cette dernière proposition est que la ligne droite qui joint deux points est plus courte que toute ligne brisée terminée aux deux mêmes points.

Soient, en effet, les deux points A, B, la droite AB et

Fig. 19.




la ligne brisée BCDEA (*fig.* 19); on aura les inégalités suivantes :

$$AB < BC + AC, \quad AC < CD + DA, \quad DA < DE + EA;$$

d'où résulte évidemment

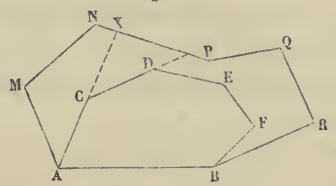
$$AB < BC + CD + DE + EA.$$

Ainsi la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre, en ne considérant que des routes composées de lignes droites, en nombre quelconque, et de grandeurs quelconques.

308. Et de là se conclurait cette autre proposition, que si d'un point A à un point B on conçoit dans un même plan une ligne brisée ACDEFB composée d'un nombre quelconque de côtés rectilignes tels, qu'un quelconque

d'entre eux prolongé ne pénètre pas dans l'intérieur du polygone formé par cette ligne brisée et AB, la somme des côtés composant cette ligne brisée sera moindre que celle des côtés de toute autre ligne brisée AMNPQRB (*fig.* 20),

Fig. 20.




terminée aux mêmes extrémités A et B, et située complétement en dehors du polygone ACDEFB.

La démonstration se fera en prolongeant d'abord le côté AC jusqu'à ce qu'il rencontre en X la ligne enveloppante. Remplaçant dans celle-ci par AX le contour AMNX, on aura diminué la ligne enveloppante totale. On diminuera encore le contour total ainsi obtenu, en prolongeant CD, puis DE; et, en continuant ainsi, on arrivera à la ligne brisée, qui sera, par conséquent, plus petite que AMNPQRB.

Euclide n'a démontré cette proposition que dans le cas où les deux lignes brisées, enveloppée et enveloppante, sont composées de deux côtés seulement.

309. *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun et que l'angle compris entre ces côtés ne soit pas le même, le troisième côté opposé au plus grand angle sera le plus grand.*

On suivra encore les démonstrations d'Euclide.

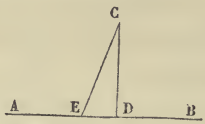
### DES PERPENDICULAIRES ET DES OBLIQUES.

310. *D'un point hors d'une droite indéfinie on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur cette droite.*

*Cette perpendiculaire est plus courte que toute oblique menée du même point à la même droite.*

Soit AB la droite indéfinie (*fig.* 21), C le point extérieur, CD une perpendiculaire sur AB.

Fig. 21.




Par le point C menons une autre ligne terminée en un point quelconque E de AB; je dis que CE ne sera pas perpendiculaire sur AB, et qu'elle sera plus grande que CD.

En effet, puisque dans tout triangle la somme de deux angles est plus petite que deux droits, et que dans le triangle CDE l'angle D est droit, l'angle CDE sera plus petit qu'un droit. Donc, d'abord, la ligne CE n'est pas perpendiculaire à AB; en second lieu, elle est plus grande que le côté CD du triangle, puisqu'elle est opposée à un plus grand angle. Donc, d'un point on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur une droite; et elle est la plus courte droite qui puisse être menée de ce point à cette ligne.

311. *Deux obliques menées d'un même point à deux points de la ligne indéfinie, équidistants du pied de la perpendiculaire, sont égales.*

Car ces obliques sont les hypoténuses de triangles rectangles égaux.

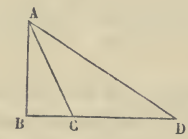
312. *De deux obliques partant d'un même point, celle dont l'extrémité est la plus éloignée du pied de la perpendiculaire est la plus grande.*

Si elles n'étaient pas du même côté de la perpendicu-

laire, on pourrait prendre du côté de l'une des obliques un point dont la distance au pied de la perpendiculaire serait la même que pour le pied de l'oblique qui est de l'autre côté. On aurait ainsi une oblique égale à cette dernière et du même côté que la première.

Cela posé, soient AB la perpendiculaire et AC, AD deux obliques situées d'un même côté (*fig.* 22). Nous avons fait voir que l'angle ACB était aigu, ainsi que ADB. L'angle

Fig. 22.




ACD est donc plus grand que ADC, et, par conséquent, dans le triangle ACD on a AD > AC ; ce qu'il fallait démontrer.

*Tout point de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est également distant de ses deux extrémités.*

Les réciproques de ces diverses propositions se démontreraient facilement, et devraient être développées dans un cours régulier.

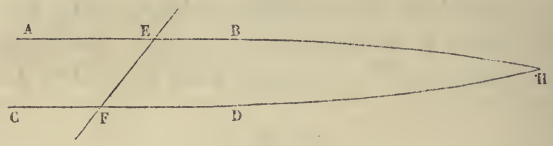
### DES PARALLÈLES.

313. *Lorsque deux lignes indéfinies sont coupées par une troisième, de telle sorte que la somme des angles intérieurs d'un même côté de la sécante soit égale à deux droits, ou, ce qui est la même condition, que les angles alternes ou correspondants soient égaux, ces deux lignes sont parallèles.*

Soient AB, CD les deux droites, EF la sécante et AEF = EFD (*fig.* 23).

Si ces lignes n'étaient pas parallèles, étant dans un même plan, elles se rencontreraient. Soit H leur point de rencontre; l'angle AEF extérieur au triangle devrait être plus grand que l'angle intérieur EFH; or, il lui est supposé égal.

Fig. 23.

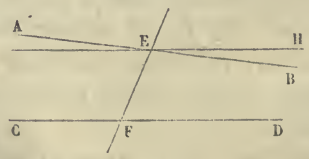



Il y aurait donc contradiction : les deux droites ne peuvent donc se rencontrer.

Dans le cas particulier où les angles AEF, EFD seraient droits, c'est-à-dire où la sécante serait perpendiculaire aux deux droites, la proposition s'énoncerait ainsi : *Deux droites perpendiculaires sur une même droite ne peuvent se rencontrer;* d'où résulterait cette proposition que nous avons déjà démontrée, que d'un point on ne peut abaisser deux perpendiculaires sur une même droite. Euclide l'a regardée comme implicitement renfermée dans la proposition générale.

314. *Postulatum d'Euclide.* — Soient deux droites indéfinies AB, CD qui, coupées par une troisième EF, font avec elles d'un même côté deux angles intérieurs dont la somme est différente de deux droites (*fig.* 24); si, par le point E,

Fig. 24.




on mène une droite EH telle, que la somme des deux angles

intérieurs soit égale à deux droits, il vient d'être démontré que cette ligne sera parallèle à FD. Or Euclide demande qu'on accorde comme évident que la ligne AB, différente de EH, rencontrera la droite AB; ou, en d'autres termes, que, par un point E, hors d'une droite CD, il ne peut y avoir qu'une seule ligne parallèle à CD.

Quant au point de rencontre de AB et CD, il est clair qu'il ne peut être que du côté où AB se trouve entre les deux parallèles, c'est-à-dire du côté où la somme des angles intérieurs est moindre que deux droits.

C'est en cela que consiste le célèbre *postulatum* de ce grand géomètre, et jusqu'ici on n'a encore trouvé aucun moyen rigoureux de s'en passer.

Rien n'est plus facile, en l'admettant, que d'établir la proposition suivante, d'où découle toute la théorie des parallèles :

315. *Si deux parallèles sont coupées par une droite, la somme des angles intérieurs sera égale à deux droits.*

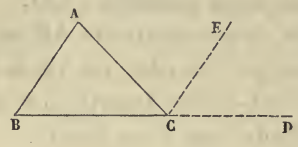
Cette réciproque du premier théorème résulte immédiatement du *postulatum*. Car, si cette somme était différente de deux droits, les deux lignes se rencontreraient : ce qui est contre l'hypothèse.

Nous ne donnerons pas le détail de toutes les conséquences de ces propositions; elles ne peuvent offrir aucune difficulté, même pour l'ordre dans lequel elles devront être présentées. Nous regarderons donc comme démontrées les propositions relatives aux angles et aux côtés des parallélogrammes, obliques ou rectangles, ainsi qu'à leurs diagonales; aux angles qui ont les côtés parallèles ou perpendiculaires, etc.

316. *Dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux angles droits.*

Soit le triangle quelconque ABC (*fig.* 25); prolongeons l'un de ses côtés, BC par exemple; dans l'angle extérieur ACD, qui est plus grand que l'angle intérieur ABC, on pourra tirer une ligne CE qui fasse l'angle ECD = ABC;

Fig. 25.




cette ligne sera parallèle à BA, et, par conséquent, les angles BAC, ACE seront égaux comme alternes-internes. Les trois angles du triangle seront donc respectivement égaux aux trois angles formés d'un même côté de BD par les lignes CA, CE : leur somme est donc égale à deux angles droits.

Et l'angle extérieur est égal à la somme des deux intérieurs opposés.

*Corollaire I.* — Tout polygone pouvant être partagé par des diagonales en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux, et la somme des angles de tous ces triangles formant précisément la somme de ceux du polygone, cette dernière sera égale à deux droits répétés autant de fois que le polygone a de côtés moins deux.

*Corollaire II.* — Si l'on prolonge tous les côtés d'un polygone quelconque en tournant toujours dans le même sens, les angles extérieurs ajoutés à ceux du polygone formeront autant de fois deux droits qu'il a de sommets ou de côtés. La somme de ces angles extérieurs est donc égale à quatre angles droits.

317. *Remarque.* — Nous avons cru devoir donner avec beaucoup de détail les propositions précédentes, dont l'enchaînement était essentiel à bien indiquer. Maintenant

que ces premières bases sont bien établies, nous ne nous assujettirons pas à démontrer ni même à mentionner tous les théorèmes que doit renfermer un Traité élémentaire de Géométrie. Nous ne nous attacherons particulièrement qu'à ce qu'il y a de général dans les théories, et à l'étude des méthodes employées à la résolution des questions ; et nous ferons ressortir autant que possible l'application de ce qui a été dit de général à cet égard dans la première Partie de cet Ouvrage.

### DU CERCLE.

318. Dans les propositions précédentes, nous n'avons considéré que des points et des droites dans un même plan. Dans les suivantes, il y aura une considération de plus, celle du cercle, c'est-à-dire de la ligne plane dont tous les points sont à une distance égale d'un même point situé dans son plan. Cette ligne ne peut être ni droite, ni composée de lignes droites, puisqu'il est démontré que les distances d'un même point aux différents points d'une droite vont en augmentant à mesure que ces points s'éloignent du pied de la perpendiculaire abaissée du point donné sur cette droite. Le cercle, ou le lieu des points également distants d'un point fixe, et situés dans un même plan, ne peut donc être que ce que nous avons appelé une *courbe :* c'est la plus simple de toutes, la seule dont on s'occupe dans les premiers éléments. Quelques auteurs appellent *cercle* la partie du plan interceptée par la courbe, et appellent celle-ci *circonférence.* Nous croyons plus convenable de ne pas faire cette distinction ; et quand nous voudrons parler de la surface comprise dans le cercle, nous le dirons expressément.

La combinaison de la ligne droite et du cercle donne lieu à un nombre indéfini de propositions, dont il est à propos de faire connaître ici les plus simples, celles qui se

retrouvent à chaque instant, et se présentent d'ailleurs si naturellement à l'esprit, que la démonstration n'en paraît nécessaire qu'à ceux qui ont déjà l'habitude du raisonnement et de la rigueur. Nous ne donnerons aucun développement à ces propositions, qui sont traitées à peu près de la même manière par tous les auteurs qui ont imité Euclide ; nous nous contenterons d'indiquer brièvement en quoi elles consistent.

On voit d'abord que les positions relatives d'une droite et d'un cercle donnent lieu à trois cas distincts. Si la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite est plus grande que le rayon, tous les points de la droite sont en dehors du cercle, puisque leur distance au centre est plus grande que la perpendiculaire qui est déjà plus grande que le rayon. Si cette perpendiculaire est égale au rayon, son pied appartient au cercle ; mais tous les autres points de la droite sont en dehors, parce que leur distance au centre est plus grande que le rayon, qui est la perpendiculaire. La droite, qui n'a ainsi qu'un point commun avec le centre, est dite *tangente*.

Enfin, si la perpendiculaire est plus petite que le rayon, son pied est dans l'intérieur du cercle, et la droite prolongée dans les deux sens rencontrera le cercle en deux points au moins : elle est dite *sécante*.

Nous disons qu'elle coupe au moins en deux points le cercle. Cela résulte d'un de nos axiomes ; mais il est bon de reconnaître qu'elle ne peut le couper en plus de deux points. Car, s'il y avait trois points communs à un cercle et à une ligne droite, leurs distances au centre seraient égales ; or les propositions démontrées sur les perpendiculaires et les obliques prouvent que d'un point à une droite il ne peut y avoir trois longueurs égales.

La seule inspection d'un cercle donne l'idée des propositions suivantes.

319. Les longueurs des cordes d'arcs égaux dans des cercles égaux sont égales ; les angles formés par les rayons extrêmes sont égaux. Les réciproques sont vraies.

Si les arcs sont inégaux, et qu'on ne considère que ceux qui sont plus petits que la demi-circonférence, au plus grand arc est opposé une plus grande corde, et un plus grand angle au centre. Les réciproques sont vraies. La perpendiculaire élevée par le milieu d'une corde passe par le centre et par le milieu de l'arc sous-tendu. Et réciproquement.

Deux parallèles qui rencontrent un même cercle interceptent des arcs égaux.

Deux cercles peuvent donner lieu, comme une droite et un cercle, à trois positions relatives différentes. Ils peuvent n'avoir aucun point commun, ou en avoir un seul, ou deux au plus. Ces trois cas correspondent à des conditions simples entre les longueurs des rayons et la distance des centres. La discussion de ces conditions demande à être faite avec beaucoup de rigueur, mais n'offre aucune difficulté.

Si deux angles, dont l'un a son sommet au centre et l'autre sur le cercle, interceptent entre leurs côtés le même arc, le premier sera double du second.

### REMARQUES GÉNÉRALES SUR LES PROPOSITIONS PRÉCÉDENTES.

320. Il n'est presque aucune des propositions énoncées jusqu'ici, qui ne frappe par son évidence les esprits les moins pénétrants, et ne puisse être acceptée par tous les hommes sans démonstration. Ce serait toutefois fort mal à propos qu'on demanderait cette admission à ceux qui veulent aller au delà, et on les exposerait à tomber souvent dans de graves erreurs par l'habitude qu'ils prendraient de juger d'après les apparences. Aussi avons-nous cru de-

voir donner avec rigueur la succession des premières vérités, et la liaison de chacune d'elles à celles qui la précèdent. Mais nous faisons remarquer cette évidence avec laquelle elles se présentent à tous les hommes, afin qu'on ne se demande pas pourquoi on commence par elle, et comment on les a découvertes. Beaucoup d'autres qui les suivront présenteront encore ce même caractère ; mais combien il y en a aussi qui n'ont pu être trouvées que par des efforts prodigieux, et dont la démonstration ne peut être suivie que par des esprits d'élite.

Jusqu'ici donc nous n'avons rien de bien important à faire ressortir sur l'emploi des méthodes. Les énoncés des propositions étant posés, on parvient si vite à la démonstration, que la marche synthétique semble la seule qu'il ait été possible d'y employer.

Il est bon toutefois de remarquer que nous avons plusieurs fois fait usage de la méthode de réduction à l'absurde, particulièrement pour démontrer des réciproques. Ainsi, après avoir démontré les conséquences que l'égalité ou l'inégalité de deux côtés d'un triangle entraîne relativement aux angles opposés, si l'on veut connaître les conséquences relatives aux côtés qui résulteraient de l'égalité ou de l'inégalité de deux angles, la méthode de réduction à l'absurde se présente si naturellement, qu'elle doit être préférée à une démonstration directe. En effet, si l'on donne, par exemple, un des angles plus grand que l'autre, le côté opposé au premier ne peut être égal à l'autre, car les angles opposés seraient égaux, ce qui est contre l'hypothèse : et il ne peut être plus petit, parce que l'angle qui lui est opposé serait le plus petit, ce qui serait aussi contre l'hypothèse. D'où il suit nécessairement que le côté opposé au plus grand angle est le plus grand. On verra souvent cette méthode employée dans la démonstration de propositions réciproques.

321. Les propositions établies jusqu'ici nous permettent de procéder à la *mesure* des grandeurs, dont nous avons fait sentir l'importance, sans la regarder toutefois comme l'unique objet de la Géométrie. Nous ne considérerons d'abord que les lignes droites, ou les arcs de cercles de rayons égaux, les angles et les surfaces des figures planes terminées par des lignes droites. Ce ne sera que plus tard que nous chercherons la mesure des surfaces planes terminées par des arcs de cercles quelconques, mêlés à des côtés rectilignes.

# CHAPITRE II.

## MESURE DES LIGNES DROITES, DES ANGLES ET DES SURFACES DES FIGURES RECTILIGNES. — SIMILITUDE.

322. Nous avons fait voir, au commencement de la première Partie, comment on pouvait exprimer par des nombres toutes les quantités pour lesquelles on a défini exactement l'égalité et l'addition. Ces nombres se nomment les *rapports* de ces quantités à celle qui a été choisie pour unité, ou la mesure de ces quantités. Ainsi, la théorie de la mesure des grandeurs d'une espèce désignée n'a d'autre objet que de faire connaître les procédés généraux propres à déterminer le rapport de deux grandeurs de cette espèce ; l'expression de ces grandeurs en nombres en sera la conséquence immédiate.

### MESURE DES LIGNES DROITES.

323. L'égalité des lignes droites ayant été définie, ainsi que leur addition, et par suite leur soustraction, on peut s'occuper de leur mesure.

Les lignes droites pouvant toujours s'appliquer les unes sur les autres, il n'y a aucune difficulté à concevoir sur une droite indéfinie une portion égale à une droite donnée ; ce que l'on exprime quelquefois en disant qu'elle a *même longueur,* en se gardant bien toutefois de définir la longueur.

Or, nous avons dit que, pour évaluer une quantité au moyen d'une unité de même espèce, il fallait d'abord en

ôter l'unité autant de fois que possible ; que s'il y avait un reste, il fallait de même en ôter autant de fois que possible une subdivision déterminée de l'unité, et ainsi de suite ; nous renvoyons à l'exposition que nous avons faite de cette méthode, et des divers cas auxquels elle pouvait donner lieu. Et comme il n'y a aucune difficulté à prendre sur une droite une longueur égale à une autre ligne droite, cette opération s'exécutera immédiatement, et nous n'avons rien de plus à dire sur la mesure des lignes droites, ou leur évaluation numérique.

D'après ce que nous avons dit en général, cette mesure peut être exprimée par un nombre entier, par un nombre fractionnaire ou par un nombre incommensurable ; mais il y a quelques remarques à faire sur ce dernier cas.

Si les deux lignes dont on cherche le rapport sont données matériellement, c'est aussi par des opérations matérielles que l'on procédera. Mais, quelle que soit la perfection des instruments employés, il y aura toujours des limites au-dessous desquelles les grandeurs ne seront plus perceptibles pour nous ; de sorte que, même sans tenir compte des imperfections des instruments et des lignes à comparer, les appréciations seraient limitées par nos sens. On arrivera donc toujours par les procédés graphiques à une évaluation qu'on regardera comme exacte, lorsque le reste sera imperceptible ; et deux lignes quelconques paraîtront toujours avoir une commune mesure, c'est-à-dire une longueur contenue exactement dans chacune d'elles. Et si l'une est prise pour unité, la mesure de l'autre sera donnée par un nombre fractionnaire.

Mais si les deux lignes ne sont pas données graphiquement, et qu'elles dépendent l'une de l'autre par des conditions exactement définies, on peut se proposer de trouver leur rapport, soit exact, soit approché, suivant qu'elles ont, ou n'ont pas, de mesure commune.

On peut, par exemple, chercher le rapport de la diagonale d'un carré à son côté; le rapport entre le rayon d'un cercle et le côté d'un polygone régulier inscrit ou circonscrit, d'un nombre donné de côtés, etc., etc., etc.

324. *De la plus grande commune mesure.* — Dans l'une ou l'autre supposition, si l'on voulait trouver la plus grande ligne comprise exactement dans les deux proposées, ce qui donnerait leur rapport exprimé par les plus petits nombres entiers, on procéderait comme pour la recherche du plus grand nombre contenu exactement dans deux nombres donnés. On ôtera de la plus grande la plus petite autant de fois que possible; s'il ne reste rien, celle-ci sera la ligne cherchée; et s'il y a un reste, la plus grande commune mesure de ce reste et de la plus petite sera la même que celle des deux lignes proposées. La question se présentant la même entre ces deux nouvelles lignes, moindres que les premières, on continuera de même jusqu'à ce que l'on arrive à un reste nul, ou que l'on s'assure qu'il n'existe pas de commune mesure.

Dans le cas de données graphiques, l'opération s'arrêtera toujours, faute de pouvoir apprécier des quantités qui dépassent une certaine limite de petitesse. Dans le cas de dépendance exactement définie, il pourra arriver, comme pour la diagonale du carré, que la marche même de l'opération annonce l'absence de commune mesure; mais le plus ordinairement, c'est par des considérations tenant à la science des nombres qu'on y parviendra, et ce n'est pas en cherchant la plus grande commune mesure par les procédés que nous venons d'indiquer.

Il est presque inutile de faire remarquer que ce que nous venons de dire à propos des lignes droites s'applique à deux quantités d'une même espèce quelconque.

325. Si l'on multipliait les deux lignes données par un

même nombre, tous les restes le seraient aussi, et par conséquent la plus grande commune mesure elle-même.

### MESURE DES ANGLES.

326. L'égalité et l'addition des angles ayant été définies, on peut se proposer de les mesurer, c'est-à-dire de trouver leur rapport à celui qui a été choisi pour unité. Comme il n'y a aucune difficulté à faire, avec une ligne donnée, un angle égal à un angle donné, on trouvera sans peine combien de fois l'angle donné contient l'unité, et combien le reste contient de subdivisions convenues de cette unité ; la mesure des angles n'offre donc en théorie aucune difficulté de plus que celle des lignes droites.

Mais il n'en est pas de même en pratique. Comme il résulterait trop d'erreurs de la construction de tous ces angles, on emploie des instruments où sont marquées les plus petites subdivisions de l'angle droit, qui est ordinairement pris pour unité; le sommet de tous les angles est le même, et, pour mesurer un angle donné quelconque, il suffirait de placer son sommet au sommet commun, un de ses côtés sur l'origine commune, et de reconnaître sur quelle subdivision tombe le second côté, ou, ce qui arrivera le plus ordinairement, entre quelles subdivisions consécutives il tombe. Or, les nombres correspondant à chaque subdivision angulaire ne peuvent être commodément écrits sur les côtés mêmes de ces angles, et il est plus convenable que la graduation se fasse sur une ligne continue qui coupe tous ces côtés, et permette de juger plus facilement la portion de la dernière subdivision que l'instrument ne peut évaluer. Or, de toutes les lignes, la plus avantageuse est le cercle, ayant son centre au sommet commun des angles. A des angles égaux au centre correspondront des arcs égaux compris

entre leurs côtés; l'instrument sera donc beaucoup plus facile à graduer que si l'on prenait toute autre courbe. Le quart de cercle correspondra à l'angle droit; le quatre-vingt-dixième de l'angle droit, ou l'angle de 1 degré, correspondra au quatre-vingt-dixième du quart de cercle, qu'on appellera l'*arc* d'un degré, et ainsi de suite; de sorte que la mesure d'un angle, en prenant l'angle droit pour unité, sera la même que la mesure de l'arc compris entre ses côtés, en prenant pour unité le quart de cercle et supposant toujours le sommet de l'angle au centre du cercle.

C'est là ce qu'on entend quand on dit qu'un angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.

327. Les recherches théoriques conduisent quelquefois à la comparaison d'angles dont le sommet n'est pas au centre des cercles qui se trouvent dans la figure, et il y a à cet égard des théorèmes qu'il est utile de connaître. Comme les angles au centre d'un même cercle ont entre eux le même rapport que les arcs qu'ils interceptent, il suffit de déterminer quel arc intercepterait entre ses côtés un angle dont le sommet serait situé en un point quelconque, et qu'on transporterait sans changer sa grandeur, de manière que son sommet vînt coïncider avec le centre. Ainsi l'angle formé par deux cordes, ou une corde et une tangente, transporté au centre, intercepterait entre ses côtés la moitié de l'arc qu'il intercepte dans la position donnée; pour l'évaluer, il ne faut donc prendre que la moitié de cet arc; ce que l'on exprime en disant qu'un angle ainsi placé a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

Il est encore bon de savoir comment on connaîtrait l'arc intercepté entre les côtés d'un angle dont le sommet serait transporté au centre, lorsque ce sommet est placé en dedans ou en dehors du cercle. Cet arc dépend d'une manière très-simple de ceux qui sont déterminés sur la figure par la ren-

contre, que l'on suppose avoir lieu, des deux côtés de l'angle avec le cercle. Ces détails ne peuvent être donnés que dans un cours régulier de Géométrie.

*Remarque.* — Nous avons comparé les angles à l'angle droit, qui se présente plus naturellement que tout autre; mais nous aurions pu prendre un angle quelconque pour unité : nous aurions été conduits ainsi à chercher le rapport de deux angles quelconques, et nous aurions établi, par les mêmes considérations, la proposition suivante :

*Le rapport de deux angles est le même que celui des arcs décrits de leurs sommets comme centres, avec un même rayon, et interceptés entre leurs côtés.*

Pour l'établir avec une généralité complète, il faut se rappeler la définition précédemment donnée de *rapports égaux*. Or, si l'on décompose l'un des angles en parties égales, l'arc correspondant se trouvera par là divisé en un même nombre d'arcs égaux; le second angle contiendra autant de subdivisions du premier, avec ou sans reste, que l'arc correspondant en contiendra du premier arc, et il en sera ainsi quelque petites que soient ces subdivisions. Or, c'est précisément cette condition qui, comme nous l'avons exposé généralement, constitue l'égalité de deux rapports *commensurables* ou *incommensurables*. Le rapport des deux angles est donc généralement égal à celui des arcs interceptés.

### MESURE DES SURFACES PLANES.

328. L'égalité des surfaces a été définie comme celle de toutes les quantités géométriques. L'addition des surfaces planes se fait en les plaçant à la suite les unes des autres, sur le même plan, sans qu'elles se recouvrent en aucune partie, et l'idée que nous attachons à la grandeur de cette somme est indépendante de l'ordre dans lequel les

parties sont placées, et des figures diverses qui peuvent en résulter. Toutes ces figures, composées de parties respectivement superposables, ne le sont pas elles-mêmes; elles n'ont ni le même périmètre ni les mêmes angles; en un mot, elles ne sont pas *égales,* mais elles seront dites de même grandeur en surface et s'appelleront *équivalentes.*

Si à des figures équivalentes on ajoute ou on retranche des surfaces équivalentes, n'importe dans quelle partie de leur étendue, les sommes ou restes seront encore dits *équivalents.* Enfin, si l'on partage deux figures équivalentes en un même nombre de parties équivalentes, les parties de l'une seront encore dites *équivalentes* à celles de l'autre. Et nous verrons bientôt comment toutes ces circonstances rentrent dans le point de vue unique de la décomposition en parties respectivement égales.

Mesurer une surface, c'est trouver son rapport à une autre surface prise pour unité. Mais ce problème est moins simple que pour les lignes droites et les angles, à cause de la difficulté de porter sur une surface quelconque des surfaces égales à celle d'une figure donnée ; aussi ne peut-il être résolu directement que dans des cas très-limités. C'est par ces cas que nous commencerons cette étude, et nous parviendrons à y ramener la mesure de toutes les figures planes terminées par des lignes droites, par des transformations successives fondées sur la considération de l'équivalence.

D'après la manière dont on procède pour l'évaluation de toute grandeur, il est nécessaire que l'unité puisse être divisée en parties égales : on a choisi, à cet effet, le rectangle, et pour plus de simplicité on a pris sa hauteur égale à sa base. En subdivisant ces deux lignes en un même nombre de parties égales, et menant par les points de division des parallèles aux côtés, on subdivise le carré unité en carrés égaux, dont les surfaces pourront devenir

aussi petites que l'on voudra par l'augmentation indéfinie du nombre des subdivisions.

Les surfaces les plus faciles à évaluer avec cette unité sont les rectangles, et c'est par là que nous allons commencer. La première proposition à établir à cet effet est la suivante :

329. *Deux rectangles qui ont un côté égal sont dans le même rapport que les deux autres côtés.*

La démonstration de ce théorème se fera comme dans le cas des angles et des arcs. Dans l'un des rectangles on considérera le côté non commun, que nous appellerons sa *base,* et on le partagera en un nombre quelconque de parties égales ; par tous les points de division on élèvera des perpendiculaires qui diviseront le rectangle en un même nombre de parties égales que la base. On prendra sur la base du second des parties égales aux subdivisions de la première, et l'on élèvera semblablement des perpendiculaires qui détermineront des rectangles égaux à ceux dans lesquels le premier a été décomposé et dont le nombre sera le même que celui des parties de la base.

Si les bases ont une mesure commune, on la prendra comme subdivision, et le nombre des rectangles égaux contenus exactement dans les deux rectangles étant le même que celui des subdivisions exactes des deux bases, le rapport des deux rectangles sera le même que le rapport de leurs bases, puisque ce sera le rapport des deux mêmes nombres.

Si les bases sont incommensurables, elles seront encore dans le même rapport que les rectangles, puisqu'il vient d'être démontré que, si l'on partageait la base et la surface de l'un en un nombre quelconque de parties égales, la base et la surface du second contiendraient le même nombre entier de ces subdivisions respectives.

330. *Mesure de la surface d'un rectangle.* — Si sur la hauteur de ce rectangle, que nous désignerons par A, on porte une longueur égale au côté du carré pris pour unité, et que par son extrémité on mène une parallèle à la base, on formera un rectangle B dont le rapport à l'unité de surface sera exprimé, d'après la proposition précédente, par le rapport, quel qu'il soit, de la base du rectangle au côté du carré ; rapport qui sera le nombre même qui mesurera cette base en prenant pour unité de longueur le côté du carré, ce que nous ferons constamment. Le rectangle B sera donc égal à l'unité de surface multipliée par ce nombre. Si maintenant nous comparons A à B, leur base étant la même, leur rapport sera égal à celui de leurs hauteurs, et sera par conséquent le nombre qui mesurera la hauteur du rectangle donné, en prenant encore pour unité le côté du carré. La surface de A s'obtiendra donc en multipliant par ce dernier nombre celui qui mesure B, qui est le même que celui qui mesure la base. D'où se déduit cette proposition générale : « Le rapport d'un rectangle quelconque au carré construit sur l'unité de longueur est égal au produit des deux nombres qui mesurent sa base et sa hauteur. »

C'est ce que l'on exprime d'une manière abrégée en disant :

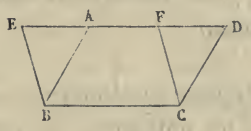
*Tout rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

331. *Deux parallélogrammes de même base et même hauteur sont équivalents.*

On appelle *base* d'un parallélogramme l'un quelconque de ses côtés, et *hauteur* correspondante la perpendiculaire comprise entre cette base et le côté parallèle. D'après cela, si l'on place les deux parallélogrammes de manière que les bases égales coïncident, les côtés opposés seront sur une même parallèle à ces bases. Soient ABCD, EBCF les deux

parallélogrammes (*fig.* 26), la figure EBCD pourra être considérée comme un composé de ABCD et du triangle ABE,

Fig. 26.




ou de EBCF et du triangle FCD, égal à ABE, comme il est facile de le démontrer. Les deux parallélogrammes sont donc équivalents, puisqu'on les obtient en retranchant des surfaces égales de surfaces égales.

332. *Un triangle est équivalent à la moitié de tout parallélogramme de même base et de même hauteur.*

On nomme *base* d'un triangle un quelconque de ses côtés, et *hauteur* correspondante la distance du sommet opposé à sa base.

Or, en menant par les extrémités d'un des côtés des parallèles aux deux autres, on forme un parallélogramme qui a même base et même hauteur que le triangle, et dont celui-ci est la moitié. Et comme tous les parallélogrammes de même base et même hauteur sont équivalents, le triangle est équivalent à la moitié de tout parallélogramme de même base et même hauteur.

*Mesure du parallélogramme.* — Puisque tout parallélogramme est équivalent au rectangle qui a même base et même hauteur, et que le rectangle a pour mesure le produit de ces deux lignes, entendu comme nous l'avons expliqué, on pourra énoncer la proposition suivante, entendue dans le même sens :

*Tout parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

*Mesure du triangle.* — Tout triangle étant équivalent à la moitié du rectangle de même base et de même hauteur, il en résulte que :

*Tout triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

*Mesure d'un polygone quelconque.* — Quel que soit le nombre des côtés d'un polygone, on peut le décomposer en triangles. Si l'on prend pour sommet commun un point à l'intérieur, le nombre des triangles sera égal au nombre des côtés du polygone. Si l'on prend un sommet du polygone même, les diagonales qui en partiraient partageraient le polygone en triangles dont le nombre serait moindre de deux unités que celui des côtés du polygone.

Cela fait, on aura la mesure de la surface du polygone en ajoutant celles de tous ces triangles. Et c'est ainsi que la mesure de toutes les figures planes terminées par des lignes droites est ramenée à celle du rectangle, qui se fonde immédiatement sur la considération de l'égalité.

### DES LIGNES PROPORTIONNELLES ET DES FIGURES SEMBLABLES.

333. La proposition fondamentale de cette théorie consiste en ce que, si deux droites sont coupées par des lignes parallèles entre elles, les parties interceptées sont proportionnelles.

Euclide, et d'après lui Legendre, en ramènent la démonstration à la comparaison des surfaces des triangles. Ce moyen n'étant pas tiré de la nature même de la question, nous préférerions celui que d'autres géomètres ont employé, et qui est fondé sur cette considération bien simple que, si l'on a un nombre quelconque de parallèles menées par des points équidistants entre eux, pris sur une des deux

lignes, les parties interceptées sur la seconde seront égales entre elles. De là résulte, par le procédé uniforme de démonstration employé ci-dessus pour les angles et pour les rectangles de même hauteur, que les parties de l'une des deux droites, comprises entre des parallèles quelconques, ont le même rapport que les parties correspondantes de l'autre, qu'il y ait ou non une mesure commune entre elles.

334. La similitude des figures planes se définit ordinairement par l'égalité des angles et la proportionnalité des côtés homologues : dans les triangles seulement une de ces conditions entraîne l'autre,

Lorsque l'on considère un système quelconque de points, séparés les uns des autres, ou réunis par des droites, on dit qu'un second système lui sera semblable, lorsqu'en joignant des points correspondants quelconques par des droites, leur rapport est toujours le même ; et, par suite, les polygones formés de part et d'autre en joignant des points homologues sont semblables. Lorsque ces conditions entre les deux systèmes ont lieu pour un assez grand nombre de points pour que le second système soit déterminé quand le premier le sera, ces mêmes conditions le seront pour tous les autres points ou lignes homologues. Ainsi, il y aura le même rapport entre les perpendiculaires abaissées de points homologues sur des lignes homologues, entre les tangentes menées de points homologues à des cercles décrits de points homologues comme centres, avec des rayons dans le même rapport, etc., etc.

335. Les triangles semblables sont des intermédiaires aussi fréquemment employés pour démontrer des proportions entre des lignes, que les triangles égaux le sont pour démontrer l'égalité de lignes ou d'angles. C'est par des triangles semblables qu'on démontre les proportions dépendant des sécantes ou tangentes menées d'un même point

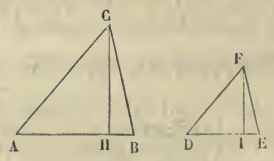
à un cercle donné; celles qui ont lieu entre les côtés d'un triangle rectangle, la perpendiculaire abaissée de son sommet sur l'hypoténuse, et les segments qu'elle y détermine, etc. Dans la résolution des problèmes, ils servent fréquemment d'intermédiaires pour ramener les constructions les unes aux autres.

336. La comparaison des figures semblables conduit à ce résultat remarquable, que leurs surfaces sont dans le même rapport que les carrés construits sur deux lignes homologues. Cette proposition se démontre d'abord pour les triangles, et s'étend facilement à des polygones semblables quelconques. La démonstration en est très-simple et facile à retenir quand on suit la marche analytique; elle offre, au contraire, quelque embarras aux élèves quand on affecte d'employer la marche synthétique, comme le fait toujours Legendre. Il ne sera peut-être pas inutile de prendre cet exemple si peu compliqué, pour montrer l'avantage de l'analyse sur la synthèse : on comprendra combien il serait plus grand dans le cas où le nombre des intermédiaires serait plus considérable.

Voici d'abord la démonstration littéralement copiée dans le Traité de ce célèbre géomètre.

Soit l'angle A = D et l'angle B = E (*fig.* 27 et 28);

Fig. 27 et 28.




d'abord, à cause des angles égaux A et D, on aura, par la proposition précédente,

$$ABC : DEF :: AB \times AC : DE \times DF;$$

on a d'ailleurs, à cause de la similitude des triangles,

$$AB : DE :: AC : DF,$$

et si l'on multiplie cette proportion terme à terme par la proportion identique

$$AC : DF :: AC : DF,$$

il en résultera

$$AB \times AC : DE \times DF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Donc

$$ABC : DEF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Dans cette démonstration, on évite en quelque sorte de faire prévoir l'utilité des diverses propositions par lesquelles on passe ; et ce n'est que quand on est arrivé au but qu'on en peut saisir la liaison. Les commençants ne l'apprennent et ne la retiennent que difficilement. Voici comment on aurait pu procéder par la méthode analytique. Pour démontrer que les deux triangles semblables ABC, DEF sont entre eux comme les carrés de deux côtés homologues, par exemple AB et DE, il suffit de démontrer que les mesures de ces triangles sont dans ce rapport ; ou que les produits de leurs bases par leurs hauteurs, qui sont les doubles de ces mesures, sont dans ce rapport. Soient CH, FI ces hauteurs ; la démonstration du théorème en question est donc ramenée à celle de la proportion suivante :

$$AB \times CH : DE \times EI :: \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2,$$

qui, en supprimant les facteurs communs, soit aux antécédents, soit aux conséquents, devient

$$CH : FI :: AB : DE.$$

Or cette proportion est vraie, puisque dans deux triangles

semblables les hauteurs sont entre elles comme les côtés. Donc la proposition énoncée est vraie.

L'avantage de cette méthode est trop évident pour qu'il soit besoin de le faire ressortir.

### AUTRE POINT DE VUE ET AUTRE DÉFINITION DE LA SIMILITUDE.

337. Lorsque deux systèmes semblables, d'après la définition précédente, sont placés de manière que deux lignes homologues soient parallèles, toutes les autres le sont respectivement; toutes les lignes qui joignent deux points homologues passent par un même point qu'on nomme *centre de similitude;* et le rapport des distances de ce point à deux points homologues quelconques est constant, et égal à celui de deux droites homologues quelconques du système; on le nomme le *rapport de similitude* des deux systèmes. Le premier système étant fixé, on peut évidemment placer le second de telle sorte que le centre de similitude occupe une position quelconque dans le plan des deux systèmes.

Après avoir reconnu cette propriété des systèmes semblables, on a pensé qu'il était plus convenable de la prendre pour la définition même de la similitude. Elle entraîne la première, et s'applique plus simplement au cas des courbes et des surfaces courbes. Nous adopterons donc la définition suivante de la similitude :

*Deux systèmes de points sont dits* semblables, *lorsqu'ils peuvent être placés de manière que toutes les droites qui joignent deux points homologues passent par un même point, et que le rapport des distances de ce point à deux homologues quelconques soit constant.*

Il résulte de là, en nous bornant aux points situés dans un même plan, que si des points sont en ligne droite dans l'un des systèmes, les homologues y seront aussi;

que s'ils sont sur un même cercle dans l'un, les homologues seront aussi sur un cercle. Ainsi le système semblable à un cercle est un cercle; et leur centre de similitude s'obtiendra en joignant les extrémités de deux rayons parallèles quelconques, et prolongeant cette droite jusqu'à la rencontre de la ligne des centres ou d'une seconde droite menée par les extrémités de deux autres rayons parallèles : le rapport de similitude sera celui des rayons. Il est évident que le centre de similitude est le point où les tangentes communes rencontrent la ligne des centres. Ce point jouit encore d'une propriété qu'il est bon de connaître, c'est que le produit des distances de ce point à deux points non homologues situés sur une sécante quelconque menée par ce point est constant.

338. Si, au lieu de porter les longueurs dans le même sens à partir du centre de similitude, on les portait en sens contraire, le second système ne serait plus placé de la même manière par rapport au premier, mais il serait identiquement le même que si l'on avait porté les distances dans le même sens que pour le premier. On voit, en effet, qu'en faisant tourner de deux angles droits le second système autour du centre de similitude que nous appellerons inverse, il coïnciderait avec celui qu'on aurait obtenu en portant les distances dans le même sens. Les lignes homologues sont toujours parallèles, mais en sens inverse, puisqu'elles se trouvent dans le même sens après une demi-révolution. On aurait le centre de similitude inverse de deux cercles, par la rencontre de la ligne des centres et de celle qui joindrait les extrémités de deux rayons parallèles et de sens contraires. Nous aurons quelque chose à ajouter à ces considérations générales sur la similitude, lorsque nous considérerons les points situés d'une manière quelconque dans l'espace.

# CHAPITRE III.

## DE LA RÉSOLUTION DES PROBLEMES.

339. En se reportant à la définition générale que nous avons donnée des problèmes, on voit facilement que l'objet d'un problème de Géométrie plane doit être de déterminer soit des grandeurs, soit des positions, d'après les rapports qu'elles doivent avoir avec des grandeurs ou des positions données. Et la marche que nous avons prescrite dans toute science pour la résolution des problèmes consistera ici à ramener la construction des grandeurs demandées, ou la détermination des positions de points ou de lignes, à des constructions que l'on sache effectuer.

Il est donc nécessaire d'abord de bien fixer quelles sont celles que l'on regardera comme pouvant toujours être exécutées, de telle sorte que toute construction qui y sera ramenée puisse être considérée comme exécutée.

Or les seules constructions que l'on admette dans la Géométrie élémentaire, comme pouvant être toujours immédiatement effectuées, sont celles d'une droite indéfinie dont on connaît deux points, ou d'un cercle dont on connaît le centre et le rayon.

On a pour les exécuter les instruments qu'on appelle la *règle* et le *compas*, et on rejette l'emploi de tout autre.

On voit ce qu'il y a d'arbitraire dans ces conditions imposées aux solutions géométriques. On ne s'y est pas toujours rigoureusement attaché : les anciens eux-mêmes ont admis quelquefois des courbes moins simples que le cercle, pour la construction de problèmes qu'ils désespéraient de

pouvoir résoudre autrement; et l'on sait même démontrer aujourd'hui que certains problèmes ne peuvent absolument être construits exactement avec la règle et le compas. Nous laisserons de côté pour le moment ces problèmes, et nous nous bornerons à ceux qui n'exigent que des constructions de droites indéfinies dont on connaît deux points, et de cercles dont le centre et le rayon sont connus.

Nous commencerons par indiquer rapidement ceux par lesquels il est naturel de commencer.

340. *Une droite étant donnée en position et en grandeur, élever une perpendiculaire en son milieu, qui n'est pas donné.*

341. *Par un point donné quelconque, mener une perpendiculaire à une droite.*

342. *Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.*

343. *Par un point pris sur une droite, tracer une seconde droite qui fasse avec la première un angle donné.*

344. *Diviser un angle ou un arc de cercle en deux parties égales.*

Ces premiers problèmes, qui se présentent à chaque instant, sont trop simples pour que nous examinions leurs solutions.

Nous allons en considérer quelques autres, dont la solution, un peu plus compliquée, fera mieux ressortir l'utilité de la méthode analytique.

345. *Inscrire un cercle dans un triangle.*

La question est de déterminer le centre et le rayon d'un cercle qui soit tangent aux trois côtés d'un triangle donné.

Comme on sait que la perpendiculaire abaissée du

centre d'un cercle sur une quelconque de ses tangentes est égale au rayon, on voit de suite que le centre du cercle demandé doit être également distant des trois côtés du triangle; que, par conséquent, la détermination de ce point est ramenée, et avec réciprocité, à un autre problème dont l'énoncé général serait :

*Trouver un point également distant de trois droites données.*

Pour résoudre ce dernier problème, on se rappellera que tous les points de la bissectrice d'un angle sont également distants de ses deux côtés, et sont les seuls à jouir de cette propriété. Il suit de là que le point équidistant de trois droites, devant être équidistant de deux quelconques d'entre elles, doit être un de ceux de la bissectrice d'un quelconque des angles que ces droites forment deux à deux; et dans le cas proposé, ces angles sont ceux qui appartiennent au triangle que forment ces trois droites. Le point cherché, s'il existe, doit donc se trouver sur les trois bissectrices; et réciproquement, si ces bissectrices ont un point commun, il satisfera. Or deux de ces bissectrices suffisent, et leur point de rencontre sera sur la troisième. Le problème est donc ramené à partager des angles en deux parties égales; ce que l'on sait faire.

346. *Décrire sur une droite donnée un segment capable d'un angle donné.*

On sait que tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux entre eux, et à l'angle formé par la corde qui lui sert de base avec la tangente à l'une quelconque de ses extrémités. Cette base et la valeur de l'angle inscrit sont données; il s'agit de décrire le cercle.

Or, d'après ce qui vient d'être rappelé, si le cercle cherché était construit, et qu'on lui menât une tangente à une des extrémités de la base, elle ferait avec cette base un

angle égal à l'angle donné ; si donc on trace une droite faisant avec la base donnée, et à l'une de ses extrémités, un angle égal à l'angle donné, on aura une tangente au cercle cherché. Le problème est donc ramené au suivant :

*Déterminer un cercle dont on connaît deux points et la tangente en un de ces points.*

Et la réciprocité s'aperçoit facilement.

Pour résoudre celui-ci, il suffit de remarquer que la ligne qui joint le centre au point de contact étant perpendiculaire à la tangente, si l'on élève au point de contact donné une perpendiculaire à la tangente donnée, elle passera par le centre du cercle. On aura une seconde ligne passant par ce centre, en élevant une perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points donnés.

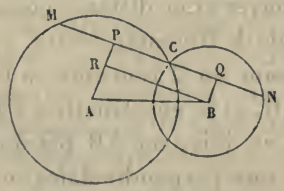
La détermination du centre est donc ramenée à des constructions qu'on sait exécuter, et, par conséquent, le problème proposé et résolu.

*Par un point* C, *commun à deux cercles dont les centres sont* A *et* B, *mener une droite telle, que la partie comprise entre les deux cercles soit égale à une longueur donnée.*

Soit MN la ligne qui résout la question (*fig.* 29).

Si des deux centres on abaisse des perpendiculaires

Fig. 29.




sur MN, elles seront parallèles et passeront par les milieux P, Q des cordes MC, NC. La distance PQ de ces deux

parallèles sera donc égale à la moitié de la longueur donnée, et par conséquent connue. Le problème est donc ramené au suivant :

*Par deux points donnés* A, B, *mener deux parallèles dont la distance mutuelle est donnée.*

Et l'on reconnaît immédiatement que la réciprocité existe.

Pour résoudre celui-ci, on remarquera que si ces parallèles étaient tracées, et que de l'un de ces points, B par exemple, on leur menât une perpendiculaire, la partie comprise BR serait égale à la distance donnée, et par conséquent le triangle ARB serait rectangle, et on connaîtrait l'hypoténuse AB et un côté BR. Si l'on construisait ce triangle, on connaîtrait la direction AR; et, comme MN lui est perpendiculaire, il suffirait d'abaisser de C une perpendiculaire sur une droite donnée, ce que l'on sait faire. On voit donc que le second problème, et par conséquent le premier, se ramène à celui-ci :

*Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse* AB *est donnée, ainsi que la longueur d'un second côté.*

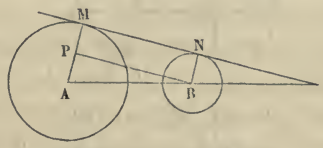
Pour résoudre ce nouveau problème, il suffit de remarquer que le sommet de l'angle droit de ce triangle ne peut être que sur le cercle décrit sur l'hypoténuse AB comme diamètre; on pourra décrire ce cercle, puisque son centre sera le milieu de AB, qu'on sait trouver. Et comme ce sommet doit se trouver à une distance connue de B, il suffira de décrire un cercle de B comme centre, avec cette distance pour rayon : le point où il rencontrera le premier sera le sommet cherché R, et la construction s'achèvera, comme nous l'avons dit, en joignant AR par une ligne indéfinie, et abaissant de C une perpendiculaire sur cette ligne.

347. *Mener une tangente commune à deux cercles donnés.*

Soient A, B les centres des deux cercles, et pour fixer les idées supposons qu'ils soient entièrement extérieurs l'un à l'autre (*fig.* 30).

Soient M, N les points de contact de la tangente commune, qui laisse les deux cercles d'un même côté. Les

Fig. 30.




rayons AM, BN, perpendiculaires à une même droite, seront parallèles; et si l'on mène BP parallèle à MN, le triangle ABP sera rectangle en P, et l'on en connaîtra l'hypoténuse AB et le côté AP qui est égal à la différence des rayons des deux cercles.

Et réciproquement, si l'on construisait un triangle sous ces conditions, AP prolongé ferait connaître sur le cercle A un point M tel, qu'en y menant la tangente à ce cercle, elle serait tangente à l'autre. Le problème est donc encore ramené à la construction d'un triangle rectangle, dont on connaît l'hypoténuse et un autre côté, ce que l'on sait faire.

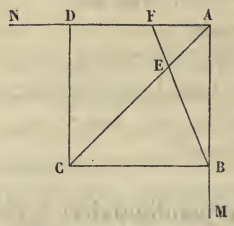
Si l'on voulait que la tangente passât entre les deux cercles, on aurait semblablement à construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse serait AB, et un autre côté la somme au lieu de la différence des rayons.

Il est inutile de faire remarquer qu'il y a deux autres tangentes communes, symétriques des deux premières par rapport à la ligne des centres.

348. *Construire un carré, connaissant la différence de la diagonale au côté.*

Soient ABCD ce carré, AE la différence donnée (*fig.* 31); CE sera égal au côté, et le triangle CEB sera isoscèle. Mais si l'on prolonge BE jusqu'à sa rencontre en F avec le côté AD, les angles du triangle AEF seront respectivement

Fig. 31.




egaux à ceux du triangle CEB; ce triangle AEF sera donc isoscèle, et l'on aura AF = AE.

On peut donc connaître le point F du carré cherché, d'où résultera la construction même de ce carré.

En effet, ayant tracé la ligne AE égale à la différence donnée, on mènera deux lignes indéfinies AM, AN, faisant avec AE des angles égaux à la moitié d'un droit : sur AN on prendra AF = AE; on mènera la droite indéfinie FE, et le point B où elle rencontrera AM donnera le côté AB du carré, qu'on achèvera en menant BC perpendiculaire sur AB, et CD sur AN.

Mais, comme nous avons omis de démontrer la réciprocité, il faut actuellement prouver que la figure construite d'après la condition AF = AE satisfait aux conditions proposées. D'abord cette figure est un carré, puisque l'angle AB a été pris égal à un demi-droit; de plus, les angles du triangle CEB étant égaux à ceux du triangle isoscèle AEF, le premier sera aussi isoscèle, et l'on aura CE = CB. Donc la ligne donnée EA sera, comme il le fallait, la différence de la diagonale au côté du carré.

## RÉFLEXIONS SUR LA MARCHE ANALYTIQUE SUIVIE DANS LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES PRÉCÉDENTS.

349. Les problèmes que nous avons résolus ne supposent que la connaissance des premières propositions de la Géométrie; mais nous avons voulu nous occuper de ce genre de questions aussitôt que nous avons été en possession de moyens suffisants pour en résoudre un assez grand nombre, dans des conditions assez variées. Nous nous sommes borné à quelques-uns seulement, parce que nous ne voulons que montrer dans quel esprit un cours doit être conçu.

Dans un cours régulier, il faudrait beaucoup les multiplier; mais ce qui est le plus essentiel, c'est de faire chercher les problèmes par les élèves, et non de leur en donner immédiatement la solution. On ne s'assimile les méthodes qu'en les appliquant soi-même, et non en apprenant comment les autres les ont appliquées.

Dans les solutions que nous avons données, nous avons suivi la méthode analytique; en les lisant, il semble qu'on assiste à la découverte progressive de l'inventeur, et même qu'il n'a eu successivement que les idées qu'on aurait eues soi-même, si l'on s'était proposé la question.

Cette méthode consiste, comme nous l'avons dit en général, à partir du problème proposé, et le ramener à un autre; puis à ramener celui-ci à un nouveau, jusqu'à ce que l'on parvienne à un problème que l'on sache résoudre. Mais chacun des problèmes que l'on substitue ainsi à celui qui le précède peut lui être lié de deux manières très-différentes. Les conditions qui lui sont imposées peuvent être des conséquences de celles du précédent, ou au contraire entraîner celles-ci comme conséquences. Souvent il y a ré-

ciprocité entre les unes et les autres ; et alors les deux problèmes, quoique différents l'un de l'autre, conduisent exactement aux mêmes solutions. Quand cette réciprocité n'a pas lieu, nous avons fait voir, dans l'exposition générale, qu'il pouvait y avoir dans le premier cas des solutions étrangères, et dans le second des solutions perdues.

Il y a donc deux marches analytiques pour la solution des problèmes : l'une procède par *déduction,* l'autre par *réduction ;* mais, dans l'un et l'autre cas, il peut se faire qu'il y ait réciprocité entre les conditions de deux problèmes successifs, et il est essentiel de s'en assurer. Si elle a lieu, les solutions sont identiques ; sinon, on sait quelle discussion il est nécessaire de faire.

La déduction est ordinairement plus commode que la réduction ; et si l'on ne veut pas faire de discussion à chaque transformation de la question, et qu'on arrive à un problème connu sans qu'aucun des intermédiaires ait été obtenu par *réduction*, il n'y a autre chose à faire qu'à reconnaître s'il y a des solutions étrangères, c'est-à-dire à s'assurer si toutes les solutions du dernier problème satisfont au premier. Mais si quelques-uns des problèmes ont été obtenus par réduction, et quelques autres par déduction, il peut y avoir des solutions perdues en même temps que des solutions étrangères ; le hasard peut même faire qu'il y ait compensation.

Dans la solution des problèmes précédents, nous sommes parti de la construction demandée, supposée faite, et nous en avons tiré des conséquences qui nous ont fourni de nouveaux problèmes ; mais nous avons eu soin de démontrer la réciprocité de chacun avec le précédent, et par conséquent la solution fournie par le dernier était identique avec la solution demandée du premier. Il faut toutefois excepter le dernier de nos problèmes, où nous avons remis à la fin la démonstration obligée de la réciprocité.

350. Une fois la solution trouvée par l'analyse, on exécute la construction en partant de la dernière à laquelle on a été ramené; c'est-à-dire qu'on procède par une marche inverse de celle qui a été suivie pour découvrir. Et cette même marche peut être suivie pour l'exposition théorique de la solution, qui se fait alors synthétiquement au lieu de se faire analytiquement.

Cette marche est presque toujours suivie par les auteurs de Traités élémentaires. Elle est plus difficile que celle qui a été suivie pour découvrir; et dans tous les cas elle exige que l'on démontre qu'il n'y a pas d'autre solution que celle que l'on énonce. Dans le dernier des problèmes précédents nous avons été obligé de démontrer que la construction que nous indiquions satisfaisait; mais nous y avions été conduit analytiquement, et ce n'est que parce que la réciprocité n'avait pas été démontrée qu'il a fallu prouver que ce qui était reconnu nécessaire était aussi suffisant. La solution synthétique de ce problème, celle que certainement Legendre aurait adoptée, aurait été conçue en ces termes : « Faites de part et d'autre de EA deux angles égaux à la moitié d'un droit, prenez AF = AE; tirez la droite FE jusqu'à sa rencontre avec AM en B : AB sera le côté du carré cherché. En effet...

Or ce n'est pas ainsi que nous avons procédé; et en partant de la figure telle qu'elle doit être, nous avons démontré qu'en joignant le sommet B du carré cherché au point E et prolongeant BE, on aurait

$$AF = AE.$$

Lors donc que nous sommes parti de cette dernière condition, ce n'était pas sans savoir qu'elle était nécessaire, et il ne restait qu'à démontrer qu'elle était suffisante : ce que nous avons fait.

## DE QUELQUES MÉTHODES POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES.

351. *Méthode des lieux géométriques.* — Beaucoup de problèmes de Géométrie, on pourrait presque dire tous, se ramènent à la détermination d'un ou plusieurs points.

Si l'on en considère un en particulier, sa position résulte de l'ensemble des conditions imposées par la question ; et si l'on en supprimait une quelconque, le problème deviendrait indéterminé, et le point en question serait, en général, susceptible d'une infinité de positions, se succédant d'une manière continue et formant ce que l'on appelle un *lieu géométrique.*

Supposons, par exemple, qu'une ligne désignée de la construction doive avoir une longueur donnée, et qu'on cherche la position d'un certain point, de telle manière que cette condition soit satisfaite, conjointement avec certaines autres. Si, au lieu de s'assujettir à cette condition, on laisse arbitraire la longueur de cette ligne, on trouvera pour solution tous les points qui correspondraient aux différentes longueurs que l'on pourrait donner à cette ligne ; et, si l'on fait varier cette longueur d'une manière continue, la position correspondante du point cherché se déplacera d'une manière continue, et l'ensemble de ces solutions formera une ligne continue.

Et il en serait de même, en général, par la suppression de toute autre espèce de conditions, dans une question où il y a une position déterminée pour le point cherché, quand on tient compte de toutes les conditions.

Cela posé, si l'on cherche le lieu de tous les points qui satisferaient à la question dont on supprimerait une condition, le point cherché ne pourra pas se trouver hors de

ce lieu. Si maintenant on reprend la condition négligée et qu'on en supprime une autre, le lieu de tous les points qui satisferont à la nouvelle question devra encore renfermer le point cherché. Ce point devant être sur les deux lieux ne peut être qu'un de leurs points d'intersection ; et réciproquement, tout point commun aux deux lieux satisfera à toutes les conditions de la question. On aura donc ainsi la solution complète du problème, et sans solutions étrangères. Et il est évident que cette méthode est *analytique*, puisqu'elle ramène une question à d'autres questions.

352. *Remarques.* — Si les lieux n'avaient pas été construits complétement, on pourrait avoir des solutions perdues. Il en serait de même encore si l'on introduisait dans l'un ou l'autre des conditions en dehors de la question. Mais il est sûr qu'on n'introduit pas ainsi de solution étrangère, et que tout point commun aux deux lieux, satisfaisant à toutes les conditions du problème, en est nécessairement une solution.

353. *Méthode des systèmes semblables.* — Il est quelquefois plus facile de construire un système semblable à celui qu'on cherche que ce système lui-même ; on est moins assujetti, puisqu'on peut choisir comme il conviendra la longueur d'une ligne qui était primitivement imposée. Si l'on peut résoudre le nouveau problème, le proposé sera ramené au suivant : « Construire un système semblable à un système donné, connaissant la longueur d'une ligne homologue à l'une de celles du premier ». Or cette construction n'offre aucune difficulté.

354. *Méthode de renversement.* — Dans tout problème graphique, on donne certaines choses construites, et l'on propose d'en construire d'autres liées d'une cer-

taine manière à celles-ci. Or il arrive souvent que les choses à construire peuvent être exécutées isolément des premières, et que la seule difficulté consiste à leur donner la position qu'elles doivent avoir relativement à celles-ci. Dans tous les cas de ce genre, il y a deux marches à suivre. On peut partir des constructions données et opérer sur elles jusqu'à ce que l'on ait obtenu celles que l'on demandait, et alors le problème est résolu ; ou bien commencer par construire les choses qui doivent avoir les rapports demandés avec les données, et, d'après ces mêmes rapports, construire sur elles ces données : il en résultera un système identique avec celui que l'on cherchait, puisque les données et les résultats y seront liés de la manière demandée ; il ne restera donc plus qu'à en reporter les diverses parties au lieu où l'on avait voulu que la construction fût exécutée.

Il peut se faire que le système auxiliaire ne soit pas identique avec celui que l'on cherche, et lui soit seulement semblable ; c'est ce qui arrive quand les grandeurs absolues des résultats ne sont pas données et que l'on ne connaît que leurs rapports. Dans ce cas, au lieu de reporter sur le premier système des parties égales à celles du second, on les porte proportionnelles, et dans un rapport déterminé par deux quelconques des grandeurs homologues.

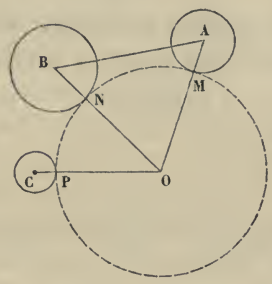
### NOUVEAUX EXERCICES SUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES.

355. Problème I. — *Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.*

Tout se réduit à trouver le centre de ce cercle, car son rayon s'ensuivra immédiatement.

Soient A, B, C les centres des cercles donnés (*fig.* 32); figurons-nous la construction demandée comme faite; soient O le centre du cercle cherché; M, N, P les points

Fig. 32.




de contact, qui seront respectivement sur les droites qui joignent le centre O aux trois autres. Les positions de ces trois centres et les grandeurs des rayons donnés peuvent donner lieu à bien des variétés que nous n'avons pas ici pour objet de discuter. Nous n'avons en vue que la méthode, et nous l'exposerons sur un quelconque des cas que la figure peut présenter, par exemple celui où les trois cercles donnés seraient entièrement extérieurs les uns aux autres.

Or, avec tant soit peu d'attention, on reconnaîtra que le centre cherché O est le même que celui d'un cercle qui passerait par l'un des trois centres donnés et serait tangent à deux cercles connus. Si, par exemple, on augmente le rayon du cercle O du rayon PC du plus petit des cercles donnés, et qu'on décrive du centre O un cercle avec ce nouveau rayon, il passera évidemment par C, et sera tangent aux deux cercles décrits de A et B comme centres avec des rayons égaux aux rayons des deux cercles donnés diminués du troisième rayon CP.

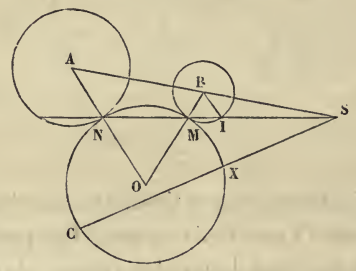
Le problème proposé est donc ramené au suivant :

*Décrire un cercle qui passe par un point donné et soit tangent à deux cercles donnés.*

Nous laisserons maintenant de côté le problème proposé pour ne plus nous occuper que de celui-ci, auquel il est ramené.

Soient A, B les centres des cercles donnés (*fig.* 33), C le point par lequel doit passer le cercle cherché, O son

Fig. 33.




centre inconnu, et M, N les points où il touche les cercles donnés.

Il faut chercher les conséquences les plus immédiates résultant de la supposition que toutes les conditions exigées sont remplies. On voit d'abord que les trois points O, M, B sont en ligne droite, ainsi que O, N, A.

Si maintenant on mène par M et N une droite indéfinie NM qui coupe en S la ligne des centres AB, et l'un des cercles en I, on obtiendra une suite de conséquences importantes, qui ramèneront le problème à un autre beaucoup plus simple.

En effet, le triangle MBI étant isoscèle, comme OMN, a ses angles respectivement égaux à ceux de ce dernier, puisque les angles en M sont égaux comme opposés par le sommet; les angles en I et N sont donc égaux, et, par suite, les lignes BI et OA sont parallèles : d'où il suit que le point S est le centre de similitude des deux cercles donnés,

puisque la ligne NIS passe par les extrémités de deux rayons parallèles BI, AN.

De là résulte, d'après une propriété, mentionnée précédemment, du centre de similitude de deux cercles, que le rectangle SN.SM est connu.

Or, si on joint les points connus S et C, et que X soit le point de rencontre de SC avec le cercle inconnu, le rectangle SC.SX sera égal à SN.SM, et, par conséquent, connu ; donc SX sera connu, comme étant la quatrième proportionnelle à trois lignes connues ; donc enfin le point X est connu.

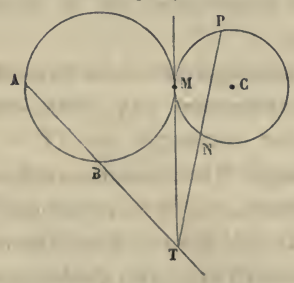
Maintenant que nous connaissons deux points du cercle cherché, qui doit être, en outre, tangent aux deux cercles A et B, nous pouvons choisir un de ces derniers et chercher le cercle, d'après la condition qu'il lui soit tangent et passe par les deux points connus; il y aura réciprocité, et nous ne nous arrêterons pas à la démontrer.

Le problème est donc ramené à cet autre, dont nous allons nous occuper en général :

*Décrire un cercle qui passe par deux points donnés et soit tangent à un cercle donné.*

Soient A, B les deux points donnés, et C le centre du

Fig. 34.




cercle donné (*fig.* 34). La solution serait bien facile pour ceux qui connaîtraient le théorème suivant :

Si, par deux points fixes A, B, on fait passer tant de cercles que l'on voudra, qui coupent ou touchent un cercle donné, les cordes communes ou la tangente commune passeront toutes par un même point de la droite AB.

Il est clair alors que si, par les deux points A, B et un troisième quelconque, pris sur le cercle C, on fait passer un cercle, qu'on joigne les deux points où ces cercles se couperont, la rencontre de cette droite avec AB fera connaître un point de la tangente au cercle C, menée au point de contact de ce dernier avec un cercle passant par A et B, et qui serait le cercle cherché. Il suffirait donc de mener du point déterminé sur AB une tangente au cercle donné, et l'on aurait le point de contact du cercle cherché avec C. Le problème serait ainsi ramené à faire passer un cercle par trois points, ce que l'on sait faire.

On voit par cet exemple combien il est utile, pour la résolution des problèmes, d'avoir un recueil de théorèmes, choisis surtout par la condition d'être applicables à un grand nombre de questions diverses; car il faut prendre garde de tomber dans l'inconvénient de l'accumulation de moyens de solutions, dont on ne sentirait que rarement l'utilité.

Nous allons maintenant, dans l'exemple actuel, raisonner comme si l'on ne connaissait pas le théorème que nous venons d'énoncer.

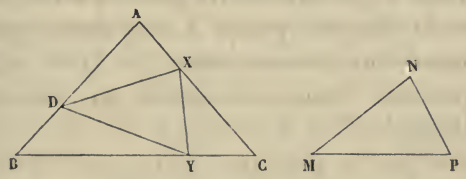
Soient AMB le cercle cherché, M le point de contact, et MT la tangente commune aux deux cercles. Le carré de TM est égal au rectangle de TB et TA, et serait aussi égal au rectangle d'une sécante quelconque TP menée par T au cercle donné, et de sa partie extérieure TN. Les quatre points A, B, N, P sont donc sur un même cercle; et, comme le point P est pris quelconque sur le cercle donné, on voit que si, par les points A et B, on fait passer un cercle quelconque qui coupe celui qui est donné, la

corde commune PN passera par le point T, où la tangente en M rencontre AB. Nous venons ainsi de démontrer le théorème que nous avions énoncé d'abord, et nous croyons inutile d'en dire davantage sur ce problème.

356. Problème II. — *Inscrire dans un triangle donné* ABC *un triangle semblable à un second triangle donné* MNP, *et ayant en un point donné* D *pris sur* AB *celui de ses sommets qui est homologue à* M.

Soit DXY le triangle cherché (*fig.* 35); son angle D sera égal à M et le rapport de ses côtés DX, DY sera le même

Fig. 35 et 36.

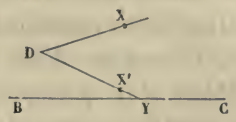



que celui de MN et MP; et réciproquement, il suffit de satisfaire à ces conditions.

Nous résoudrons d'abord ce problème par la méthode des lieux géométriques. Pour cela, nous laisserons de côté la condition que le sommet X soit sur la ligne AC, et nous serons ainsi conduit au problème suivant :

*On joint un point donné* D *à un point quelconque* Y *d'une droite donnée* BC (*fig.* 37); *au point* D *on mène*

Fig. 37.




*une droite* DX, *qui fasse avec* DY *un angle égal à un*

*angle donné, et telle, que le rapport des longueurs* DX, DY *soit égal à celui de deux lignes données : trouver le lieu des points* X *ainsi déterminés.*

Quand on aura résolu ce problème, il suffira de chercher la rencontre de ce lieu avec le côté AC du triangle proposé.

Pour résoudre ce problème, auquel le premier est ramené, on remarquera que pour construire un point quelconque X du lieu, on pourra commencer par prendre la longueur DX sur la direction même de DY, ce qui donnera un point X′, puis faire tourner le point X′ autour de D, de manière que le rayon DX′ décrive l'angle donné M. Or, le lieu des points X′ sera une droite parallèle à BC, et facile à déterminer. Le lieu des points X sera donc cette droite, que l'on aurait fait tourner autour de D de la quantité angulaire connue. Nous n'en dirons pas davantage sur cette solution.

357. *Autre solution du même problème.*—Appliquons maintenant à ce problème la méthode de renversement; partons du triangle qui doit être inscrit, et cherchons à construire l'autre sur lui. Mais comme on ne connaît que l'*espèce*, et non les dimensions mêmes de ce triangle, on ne peut que chercher à construire un système semblable à celui qu'on cherche.

Soit donc construit un triangle quelconque M′N′P′, semblable à MNP (*fig.* 38).

Pour obtenir un triangle qui lui soit circonscrit et soit semblable à ABC, il suffira de décrire sur M′N′ et M′P′ des segments respectivement capables des angles A et B; de mener par M′ une sécante A′B′, puis de tirer les droites A′N′, B′P′. Mais il y a encore une condition à remplir pour que le système soit semblable à celui qu'on cherche : c'est que le point M′ divise A′B′ dans le même

rapport que le point D divise AB. On est donc ramené à résoudre le problème suivant :

*Par un des points d'intersection de deux cercles donnés, mener une sécante telle, que les parties comprises dans les deux cercles soient dans un rapport donné.*

Fig. 38.

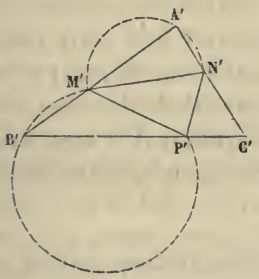
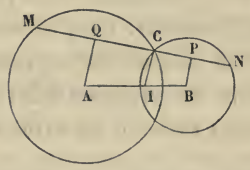



Fig. 39.




Soient A et B les centres de ces deux cercles (*fig.* 39), C le point commun, et MN la sécante cherchée.

Le rapport de MC à NC étant donné, on connaît celui de leurs moitiés CP, CQ, déterminées par les perpendiculaires abaissées des deux centres. Or, une conséquence bien simple de ce que cette condition est satisfaite sera que la parallèle à ces perpendiculaires, menée par C, divisera AB dans ce même rapport donné. Mais on peut trouver ce point de division I, puisque AB est connu ; on aura donc, en le joignant à C, la perpendiculaire à la ligne cherchée MN, et, par suite, cette ligne elle-même.

358. Problème III. — *Inscrire, dans un triangle donné, un triangle égal à un triangle donné.*

Dans ce cas, le triangle à inscrire n'a pas l'indétermination qu'il avait dans le précédent, mais aussi la position de ses sommets n'est assujettie à aucune condition.

On pourrait encore chercher à appliquer la méthode des lieux géométriques, en laissant de côté la condition que

l'un des sommets soit sur un des côtés du triangle donné. La position de ce sommet devient alors indéterminée, et si l'on pouvait en construire le lieu, son intersection avec le côté du triangle donné ferait connaître la solution. Mais ce lieu n'est ni une droite ni un cercle; et, bien qu'il soit possible de déterminer cette intersection par des constructions de droites et de cercles, il vaut mieux renoncer à cette recherche peu élémentaire et essayer une autre méthode. Celle de renversement se présente naturellement et réussit immédiatement. Car, si sur deux côtés du triangle à inscrire on décrit des segments capables des angles correspondants du premier triangle donné, le problème sera évidemment ramené au suivant :

*Par l'un des points de rencontre de deux cercles, mener une sécante telle, que la partie comprise entre ces cercles soit égale à une ligne donnée,*

Problème trop facile pour que nous croyions nécessaire d'en indiquer la solution.

Par ces exemples très-simples, et que nous croyons inutile de multiplier, nous avons voulu montrer comment il faut habituer les élèves à chercher. On ne saurait trop les y exercer, pourvu qu'on ait soin de proportionner la difficulté à leur force, et que l'analyse y joue le plus grand rôle possible. Il ne faut pas leur dissimuler qu'on peut souvent faire des tentatives un peu au hasard; mais la manière de les suivre est toujours susceptible d'être dirigée, et il n'est pas inutile de leur faire connaître de bonne heure l'insuffisance de nos moyens de recherche, pour les esprits même les plus pénétrants, afin que l'insuccès ne les décourage pas, et ne les empêche pas de reconnaître que des efforts bien dirigés ont toujours un résultat utile pour l'esprit, même lorsqu'ils ne produisent pas celui qu'on avait en vue.

# CHAPITRE IV.

## DES SYSTÈMES DONT TOUS LES POINTS NE SONT PAS DANS UN MÊME PLAN.

359. Si l'on considère simultanément plusieurs plans, des points et des lignes droites ou courbes, situées ou non situées dans ces plans, et enfin des corps solides, toutes les notions précédentes pourront trouver leur application, parce qu'on pourra considérer séparément dans ce système des points qui se trouveront dans un même plan. On pourra même souvent y introduire de nouveaux plans, dans lesquels on imaginera des constructions propres à relier les parties du système, soit pour démontrer des rapports, soit pour effectuer des constructions demandées. A ce dernier point de vue, on a bientôt compris la difficulté qu'il y aurait à réaliser ces plans auxiliaires, ou même les données non dans un même plan ; et l'on a cherché les moyens de construire les choses demandées, sans avoir besoin d'autre chose que de tracés exécutés sur un seul et même plan. Cette question générale, susceptible d'un immense développement, et d'une très-grande utilité pratique, constitue ce qu'on appelle la *Géométrie descriptive*. Sans contester cette utilité, nous ne croyons pas devoir entrer dans le détail de tous les procédés ingénieux qu'elle emploie pour atteindre son but. Les propositions sur lesquelles elle se fonde sont de la Géométrie ordinaire, et leur place y est naturellement marquée ; mais ce qui est propre à la Géométrie descriptive, c'est de faire usage de toutes les connaissance acquises et de tous les moyens de construction, en

réduisant toujours l'exécution effective à avoir lieu dans le plan unique qui est donné. Les difficultés qu'on y rencontre ne sont pas de celles qu'il entre dans notre objet d'éclaircir, et nous renverrons pour cela aux Traités spéciaux.

360. Les premières propositions relatives aux systèmes de points non dans un même plan, qu'on appelle quelquefois *systèmes de points dans l'espace,* ont une certaine analogie avec celles qui commencent la première Partie. Il y a lieu de considérer des droites perpendiculaires, ou obliques, ou parallèles à des plans; des plans perpendiculaires ou parallèles entre eux: des surfaces courbes dont les plus simples sont la sphère, le cylindre, le cône, qui donnent lieu à des problèmes analogues à ceux du cercle sur un plan, mais beaucoup plus variés; des angles formés par deux ou plusieurs plans; des solides terminés par des plans.

Les quantités de même espèce peuvent être comparées entre elles et exprimées par des nombres, en choisissant une d'entre elles pour unité. Ainsi, la comparaison des angles formés par l'intersection de deux plans se ramène facilement à la considération de l'égalité. La comparaison des solides terminés par six faces parallèles deux à deux, qu'on nomme *parallélépipèdes,* se ramène facilement à cette même considération de l'égalité ou de l'équivalence, qui se définira pour les solides comme pour les figures planes. On passe sans difficulté de ces solides à ceux d'une espèce plus générale, qu'on nomme *prismes,* et qui sont terminés par deux faces parallèles et un nombre quelconque d'autres faces parallèles à une même ligne droite.

Nous admettons que toutes ces théories soient établies et qu'on ait exercé les élèves à la résolution de problèmes qui s'y rapportent, comme nous l'avons indiqué pour les points dans un même plan. Nous croyons inutile de nous en oc-

cuper, parce qu'elles ne présentent ni difficultés réelles, ni applications de méthodes générales, essentiellement différentes de celles qui ont déjà été étudiées.

Mais, pour aller au delà, il faut des procédés nouveaux, sans lesquels on ne ramènerait même pas aux précédents tous les solides terminés par des plans. Pour les surfaces planes, nous avons pu mesurer toutes celles qui étaient terminées par des droites; mais nous nous sommes arrêté là. Les méthodes que nous allons exposer nous permettront d'étendre les théories de la Géométrie, soit pour la mesure des surfaces planes, soit pour celle des solides quelconques et de bien d'autres espèces de quantités.

# CHAPITRE V.

## DES GRANDEURS DONT LA COMPARAISON NE SE RAMÈNE PAS DIRECTEMENT A LA CONSIDÉRATION DE L'ÉGALITÉ. — MÉTHODE DES LIMITES. — MÉTHODE DES INFINIMENT PETITS.

361. Après la comparaison des surfaces des figures rectilignes planes, d'où est résultée leur mesure ou leur expression numérique, se présente naturellement la comparaison des surfaces des figures dont le contour n'est pas uniquement formé de lignes droites.

La question la plus simple de ce genre, celle que se sont proposée d'abord les anciens, a pour objet de trouver le rapport des surfaces de deux cercles dont les rayons sont donnés.

Avant de s'occuper de cette recherche, on avait démontré que tout polygone régulier peut être inscrit ou circonscrit à un cercle; que deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, et que leurs surfaces sont entre elles comme les carrés des rayons des cercles qui leur sont inscrits ou circonscrits. Or, en partageant les circonférences de deux cercles donnés quelconques en un même nombre très-grand de parties égales, et joignant les points de division par des droites, on a des polygones réguliers inscrits semblables, dont les surfaces sont dans le même rapport que les carrés des rayons des cercles circonscrits, qui sont les cercles donnés. De plus, en doublant indéfiniment le nombre des subdivisions des circonférences, les surfaces de ces polygones diffèrent de moins en moins de celles des cercles. On a donc aperçu facilement cette

proposition, que des surfaces très-peu différentes de celles des deux cercles, sont comme les carrés de leurs rayons.

Cet aperçu vague indique la route à suivre; mais il y avait de grands efforts à faire pour arriver au résultat par des raisonnements rigoureux. Nous expliquerons avec quelque détail la solution de cette question, donnée par Euclide, parce qu'elle offre le premier exemple d'une grande conception, que les modernes ont adoptée en en simplifiant l'application, sans la changer au fond, et sans y avoir rien introduit qui eût échappé à la sagacité des anciens géomètres.

Cette conception consiste à regarder les quantités que l'on veut comparer comme limites de quantités variables d'espèce plus simple, et qui se prêtent plus facilement aux comparaisons. La relation entre ces nouvelles quantités est plus facile à trouver, et sa recherche constitue une question plus simple, à laquelle il reste à ramener la première.

Cette méthode se compose donc de trois parties distinctes :

1° Choisir les quantités d'espèce plus simple dont les proposées soient les limites ;

2° Chercher la relation entre ces quantités auxiliaires ;

3° Passer de cette relation à celle des quantités proposées.

Nous allons exposer la manière dont Euclide remplit ces trois objets successifs dans la question de la comparaison des cercles. Cela suffira pour faire comprendre l'esprit général de la méthode, dont nous donnerons bien d'autres exemples tirés des écrits des anciens; et nous montrerons ensuite comment les modernes l'ont simplifiée.

362. *La surface d'un cercle est la limite de celle de polygones réguliers inscrits.*

Nous rappellerons que nous avons appelé limite d'une

grandeur variable une grandeur constante telle, que la différence entre elle et la variable puisse devenir et rester moindre que toute grandeur désignée.

Or Euclide a démontré que si l'on considère un polygone régulier inscrit dans un cercle, et que l'on double indéfiniment le nombre de ses côtés, l'aire du polygone, qui augmente continuellement, peut finir par différer de celle du cercle d'une quantité moindre que toute surface désignée; d'où il suit que cette aire est une variable dont la différence avec l'aire constante du cercle peut devenir et rester moindre que toute quantité désignée, et que, par conséquent, l'aire du cercle en est la limite.

Euclide part du carré inscrit et passe successivement aux polygones de huit côtés, de seize côtés, de trente-deux, et ainsi de suite. L'aire de chacun de ces polygones diffère moins de celle du cercle que n'en différait celle du précédent, et cette différence se réduit toujours de plus de moitié en passant d'un quelconque de ces polygones au suivant, parce que les triangles que l'on ajoute dans chaque segment sont plus de la moitié de ce segment, puisqu'ils sont exactement la moitié du rectangle qui aurait la base et la hauteur de ce segment, et lui serait évidemment supérieur. Or il a démontré antérieurement que si d'une grandeur quelconque on ôte plus de la moitié, que du reste on ôte plus que sa moitié, et ainsi de suite indéfiniment, les restes finiront par devenir moindres que toute grandeur désignée. Il en résulte donc qu'en partant de n'importe quel polygone régulier inscrit dans un cercle, sa différence avec le cercle est une grandeur fixe dont on ôte plus de la moitié en doublant une première fois le nombre des côtés. Il en sera de même du nouveau reste, en doublant le nombre des côtés du nouveau polygone, et ainsi de suite. Ces polygones successifs diffèrent donc du cercle de quantités qui peuvent devenir et rester moindres que toute quantité don-

née. *Le cercle en est donc la limite.* On voit qu'il n'est nullement nécessaire de commencer comme Euclide par le carré inscrit. Il y voyait probablement l'avantage de l'uniformité de raisonnement depuis le premier polygone, qui était lui-même plus grand que la moitié du cercle entier.

Il est bon de remarquer qu'on aurait pu également considérer les polygones circonscrits et partir d'un polygone régulier quelconque. L'excès de sa surface sur celle du cercle serait diminué de plus que sa moitié, en passant au polygone d'un nombre de côtés double ; de sorte qu'en continuant indéfiniment cette opération, l'excès sur le cercle peut devenir moindre que toute quantité donnée, et, par conséquent, le cercle est la limite des polygones réguliers circonscrits.

Dans les Traités modernes, cette propriété du cercle se démontre ordinairement par la considération simultanée des polygones inscrits et circonscrits. En les prenant semblables, on démontre facilement que leur différence tend vers zéro, et qu'il en est de même, par conséquent, de la différence de chacun de ces polygones au cercle, qui est compris entre eux.

Si l'on ne veut pas faire servir les polygones inscrits et circonscrits à donner par leur différence une limite supérieure à leur différence au cercle, mais seulement à démontrer que la surface du cercle est la limite de celle de polygones réguliers, la démonstration d'Euclide serait peut-être préférable.

363. *Les surfaces de deux cercles sont entre elles comme les carrés des rayons.*

Euclide ayant démontré que deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont comme les carrés des rayons des cercles circonscrits, et que les polygones inscrits dans un cercle peuvent en différer de moins que toute

grandeur désignée, apercevait sans aucun doute que les cercles eux-mêmes sont comme les carrés de leurs rayons ; mais il était nécessaire d'en donner une démonstration rigoureuse, surtout dans un temps où l'on trouvait des sophistes qui niaient des choses bien plus évidentes, et appuyaient leurs opinions des raisonnements les plus subtils et les plus bizarres.

C'est par la méthode de réduction à l'absurde qu'il obtenait cette rigueur ; et voici comment il procédait :

Si le rapport des carrés des rayons R, R′ n'est pas égal à celui des surfaces S, S′ des deux cercles, il sera plus grand ou plus petit. Dans le premier cas, il serait égal au rapport de S à une surface plus petite que S′ ; dans le second, il serait égal au rapport d'une surface plus petite que S à la surface S′. On est donc ramené à démontrer que le rapport des carrés des rayons ne peut être égal à celui de l'un des deux cercles à une surface moindre que l'autre.

Pour cela, supposons que l'on ait

$$R^2 : R'^2 :: S : \Sigma.$$

$\Sigma$ étant moindre que S, nous allons voir que cela conduit à une absurdité.

En effet, concevons dans les deux cercles deux polygones réguliers inscrits, d'un même nombre de côtés. Soient P, P′ leurs surfaces ; on aura

$$R^2 : R'^2 :: P : P'.$$

Or on pourra supposer le nombre des côtés de ces polygones assez grand pour que leurs surfaces diffèrent aussi peu qu'on voudra de celles des cercles, et que, par conséquent, P′ surpasse $\Sigma$, qui est une quantité fixe moindre que S′ ; et alors les deux proportions sont incompatibles, puisqu'elles conduisent à la suivante :

$$S : \Sigma :: P : P',$$

qui est fausse, puisqu'on a

$$S > P \quad \text{et} \quad \Sigma < P'.$$

L'hypothèse d'où l'on est parti est donc fausse, et, par conséquent, le rapport de $R^2$ à $R'^2$ ne peut être plus grand que celui de S à S'.

On prouverait de la même manière qu'il ne saurait être plus petit : il lui est donc égal ; ce qu'il fallait démontrer.

*N. B.* Il suit de là que le rapport de la surface d'un cercle quelconque au carré de son rayon est le même, quel que soit ce rayon. Nous trouverons bientôt une seconde signification géométrique à ce rapport constant.

La surface d'un cercle quelconque est donc égale au produit du carré de son rayon par ce nombre constant.

364. *Résumé de cette méthode.* — La méthode que cet exemple suffit pour faire bien comprendre, et que les anciens géomètres ont appliquée à toutes les questions où la comparaison des quantités ne pouvait être ramenée aux premières notions, considérée au point de vue le plus général, peut se résumer comme il suit :

Considérer les quantités entre lesquelles on cherche une relation comme limites de quantités plus simples ; chercher la relation entre ces dernières, qui fait prévoir celle que les proposées ont entre elles ; poser ensuite cette dernière comme un théorème à démontrer, et employer à cet effet le procédé de réduction à l'absurde, en s'appuyant tant sur la relation qu'on a démontrée entre les quantités auxiliaires que par la condition que ces dernières puissent être supposées aussi voisines des proposées que l'exigeront les besoins de la démonstration.

Exposons maintenant la méthode plus simple que les modernes lui ont substituée.

# MÉTHODE DES LIMITES.

## PRINCIPE FONDAMENTAL.

365. *Une variable ne peut tendre vers deux limites différentes.*

Cette proposition ne serait pas vraie si par *limite* on entendait seulement une constante telle, que sa différence avec la variable pût devenir moindre que toute grandeur donnée, et qu'on n'ajoutât pas que cette différence restera moindre que cette grandeur, dans la suite indéfinie de valeurs qu'elle prendra ensuite. En effet, sans cette condition, que nous avons expressément exigée dans la définition de limite, une variable pourrait, après s'être approchée d'une certaine constante, s'en éloigner pour s'approcher d'une autre constante, et revenir ainsi de l'une à l'autre, de telle manière que sa différence avec ces deux constantes devînt alternativement au-dessous de toute grandeur donnée; mais, avec la condition nécessaire que nous venons de rappeler, il est facile de voir que cela n'est plus possible.

Supposons, en effet, qu'une variable ait deux limites A et B qui aient entre elles une différence D, et soit $\Delta$ une quantité moindre que la moitié de D; il est évident que les intervalles compris d'une part entre $A+\Delta$ et $A-\Delta$, et d'une autre part entre $B+\Delta$ et $B-\Delta$, n'ont rien de commun, c'est-à-dire qu'aucune grandeur ne peut être dans l'un et dans l'autre à la fois. Or, une variable qui aurait pour limite A devrait finir par rester dans le premier intervalle, et, si elle avait aussi B pour limite, elle devrait aussi finir par rester dans le second. Elle serait donc à la fois dans les deux, ce qui est absurde.

Donc *une variable ne peut avoir deux limites inégales.*

## COMMENT ON PASSE D'UNE RELATION ENTRE DES VARIABLES A UNE RELATION ENTRE LEURS LIMITES.

366. Toute relation entre des grandeurs peut généralement se ramener à une égalité ou une inégalité entre certaines expressions qui en dépendent. Nous ne nous occuperons ici que des premières.

Considérons donc une égalité dans les deux membres de laquelle des variables, tendant vers des limites, se trouvent combinées entre elles et des constantes par des opérations quelconques, par exemple d'addition et soustraction seulement, s'il s'agit de quantités concrètes; et de multiplications, divisions, etc., si elles sont censées réduites en nombre. La première question qui doit nous occuper consistera à déterminer la limite des sommes, différences, produits, quotients, racines, etc., de variables dont on connaît les limites.

367. Nous pourrions examiner successivement les diverses opérations auxquelles les variables peuvent être soumises, et faire une démonstration pour chacune; mais ce serait inutile, parce que toutes les conclusions qui s'y rapportent découlent immédiatement de ce qui a été établi dans la science des nombres, relativement à la continuité. Nous avons en effet démontré que si, dans une fonction de diverses quantités, on concevait deux systèmes de valeurs pour ces quantités, on pouvait supposer une assez petite différence entre ces valeurs respectives, pour que la différence des deux valeurs de la fonction fût moindre que toute grandeur donnée. Il résulte de là que les variables $x, y, z, \ldots, u$ peuvent différer assez peu de leurs limites $a$, $b$, $c$, ... $l$ pour que la fonction des premières soit aussi peu différente qu'on voudra de la même fonction des secondes, et que par

conséquent cette dernière est la limite de la première. D'où l'on déduira cette proposition générale :

*Si des variables tendent vers des limites finies, toute fonction de ces variables, tendra vers la même fonction de ces limites.*

Et si, dans un cas particulier, la fonction des variables était constante, cette valeur constante serait égale à la même fonction des limites. Car leur différence pouvant être démontrée au-dessous de toute grandeur, et étant constante, ne peut être que zéro.

*N. B.* Nous excluons le cas où une des limites serait zéro, parce que si la variable correspondante était en diviseur, et qu'il y eût en facteur une quantité devenant nulle en même temps, les raisonnements précédents ne s'appliqueraient plus. Ce cas très-important sera considéré plus tard.

368. On voit, d'après cela, comment, ayant une relation entre des variables quelconques, on peut en obtenir une entre leurs limites.

En effet, cette relation étant supposée réduite à une égalité entre deux fonctions des variables, et les limites de deux quantités égales étant égales, il s'ensuit que les limites des deux membres de l'égalité sont égales ; mais ces limites s'obtiennent en remplaçant les variables par leurs limites. D'où se conclut cette proposition :

*Quand on a une relation entre des variables qui ont des limites finies, on en aura une entre leurs limites en substituant simplement ces limites aux variables.*

Dans le cas particulier où les deux membres de la relation seraient constants, il a été démontré qu'ils seraient respectivement égaux aux résultats de la substitution des imites aux variables ; et, par conséquent, ces résultats se-

raient égaux, puisque les deux membres le sont. La conclusion est donc la même que lorsque ces membres sont variables.

369. *En quoi consiste la méthode des limites.* — En réunissant les propositions que nous venons d'établir, on obtient la méthode générale que nous allons formuler :

« Lorsque l'on veut obtenir une relation entre des quantités qui peuvent être considérées comme limites de quantités variables d'une espèce plus simple, on cherchera d'abord la relation entre ces dernières et les données, et peut-être encore certaines autres variables auxiliaires.

» Si cette relation est obtenue, on en aura une autre en substituant à toutes les variables leurs limites; et l'on aura ainsi une relation entre les quantités proposées. » Le problème sera donc résolu.

370. *Remarque.* — Cette méthode, comme on le voit, ne diffère de celle qu'on trouve dans les ouvrages d'Euclide et d'Archimède que par la manière de démontrer la relation entre les limites des quantités entre lesquelles on a trouvé une relation. Dans la méthode des limites que nous venons d'exposer, on démontre généralement, quelle que soit la forme de cette relation, qu'on en aura une exacte en remplaçant les variables par leurs limites, ce qui donne la relation entre les quantités proposées. Dans la méthode des anciens on commence de même par considérer les quantités proposées comme limites d'autres plus simples, et par chercher la relation entre ces dernières. Pour les inventeurs elle entraînait immédiatement celle entre les limites, et la méthode des modernes n'a en cela aucun avantage sur celle des anciens; mais, quand ils l'avaient découverte, ils n'osaient pas la communiquer aux autres de la même manière, crainte des objections subtiles des sophistes, et ils la posaient comme un théorème à démontrer, sans parler

des moyens par lesquels ils y étaient parvenus. S'appuyant alors sur la relation trouvée entre les quantités variables, et sur la propriété qu'elles avaient de pouvoir différer des proposées d'une quantité moindre que toute grandeur donnée, ils démontraient que la relation ne pouvait être autre que celle qu'ils annonçaient, parce que toute autre supposition conduirait à des absurdités ou des contradictions.

La méthode des modernes est donc préférable. Elle donne une manière générale et uniforme de passer de la relation des variables à celle des quantités proposées; tandis que les anciens étaient obligés de faire des raisonnements différents pour les différentes questions, et que la marche de la réduction à l'absurde est pénible, et ne montre pas comment la vérité a été trouvée; elle fatigue celui qui apprend et ne l'éclaire pas. Mais ce passage de la première relation à la seconde était fait par les inventeurs, comme il l'est aujourd'hui; et ce n'est qu'après l'avoir fait qu'ils pouvaient poser l'énoncé de leurs théorèmes; le perfectionnement fait par les modernes est donc utile plutôt à ceux qui apprennent qu'à ceux qui découvrent.

### DIVERSES MANIÈRES DONT LES QUANTITÉS PEUVENT ÊTRE CONSIDÉRÉES COMME LIMITES.

371. Il arrive quelquefois qu'on aperçoit immédiatement une grandeur d'une espèce plus simple que la proposée, et qui puisse en différer aussi peu qu'on voudra : par exemple, s'il s'agit d'un cercle, on démontre facilement que l'on peut approcher indéfiniment de sa surface au moyen de polygones réguliers inscrits ou circonscrits, parce que la différence entre deux polygones semblables inscrits et circonscrits peut elle-même devenir moindre que toute quantité donnée. Mais, dans la plupart des cas,

les variables d'espèce plus simple ne se présentent pas aussi facilement, et nous allons faire connaître les procédés généraux dont on fait usage pour cette recherche.

### DES QUANTITÉS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE SÉRIES.

372. Nous avons vu qu'Euclide, pour approcher de plus en plus de la surface du cercle, commence par y considérer le carré inscrit, auquel il ajoute les quatre triangles ayant pour bases les côtés de ce carré, et pour sommets les milieux des arcs sous-tendus; à cette somme il ajoute huit nouveaux triangles, ayant pour bases les côtés de l'octogone formé par les précédents, et continue ainsi indéfiniment; puis il prouve très-simplement que ce qui reste du cercle, en enlevant le carré et cette suite de triangles, peut devenir moindre que toute quantité donnée, et que par conséquent par ce procédé on tend de plus en plus à épuiser la surface du cercle, de sorte que la limite serait l'épuisement complet.

Ainsi Euclide ne considère pas directement les surfaces des polygones dont le nombre des côtés se double toujours, mais ce qui s'ajoute successivement à la surface de chacun d'eux pour avoir celle du suivant; de telle sorte que le cercle est considéré comme la limite d'une somme de termes en nombre indéfiniment croissant, dont le premier est le carré inscrit, le second la somme des quatre triangles de premier ordre, le troisième la somme des huit triangles de second ordre, et ainsi de suite.

En considérant d'une manière générale ce procédé dont les anciens nous ont donné bien des exemples, on voit qu'il consiste à ôter d'abord de la quantité proposée une partie déterminée d'espèce plus simple; puis à ôter de ce qui reste une nouvelle quantité fixe comme la première,

ce qui donne lieu à un nouveau reste, dont on ôte encore une nouvelle quantité fixe, et ainsi de suite.

Si le reste, après un certain nombre d'opérations de ce genre, devient et demeure au-dessous de toute quantité donnée, la quantité proposée peut être regardée comme limite de la quantité variable qui serait la somme des termes, en nombre indéfiniment croissant, qu'on en a successivement enlevés, et qui constituent ce que dans la science des nombres nous avons appelé une *série*.

Nous emprunterons aux anciens plusieurs exemples de ce procédé : les modernes en ont fait un usage bien plus étendu sans doute, mais le principe était posé du temps d'Euclide.

### DES QUANTITÉS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE SOMMES D'INFINIMENT PETITS.

373. Archimède a conçu une autre manière d'envisager les grandeurs comme des limites. Il a pris pour variable, non plus la somme de grandeurs invariables chacune, comme dans les séries, mais variables chacune, et décroissant de manière à pouvoir devenir moindres que toute grandeur donnée. Il démontrait que cette somme, dont le nombre des parties croît indéfiniment, à mesure que leur grandeur diminue, peut finir par différer de la quantité proposée de moins que toute grandeur désignée ; c'est-à-dire, suivant notre langage, qu'il démontrait que cette quantité serait la limite de la somme des quantités décroissantes, dont le nombre augmenterait indéfiniment.

Nous appellerons *quantité infiniment petite* ou simplement *infiniment petit*, *toute grandeur variable dont la limite est zéro*.

Le point de vue que nous venons d'indiquer, et dont il

est juste de regarder Archimède comme l'inventeur, consiste donc à considérer les grandeurs comme *limites de sommes d'infiniment petits.*

Nous donnerons bientôt des exemples, tirés des anciens et des modernes, de ces deux manières d'envisager les grandeurs comme limites de variables.

### DES GRANDEURS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE RAPPORTS D'INFINIMENT PETITS.

374. Nous allons encore indiquer une dernière conception toute moderne, et qu'on doit réellement considérer comme entièrement due à Descartes.

Ce grand géomètre y est parvenu à l'occasion d'une des plus importantes questions de la Géométrie dont il a donné le premier une solution générale. Elle consiste à regarder la quantité qu'on cherche comme étant la limite du rapport de deux infiniment petits. Nous donnerons quelques applications de cette conception, qui est une des plus grandes et des plus utiles de la science moderne, et que les successeurs de Descartes ont considérablement étendue.

### PRINCIPE FONDAMENTAL DANS L'EMPLOI DES INFINIMENT PETITS.

375. Dans toutes les circonstances où Archimède a employé les infiniment petits, il considère deux sommes, l'une plus grande, l'autre plus petite que la quantité proposée; et non-seulement ces conditions sont remplies pour les sommes entières, elles le sont encore pour les éléments correspondants.

Ainsi, par exemple, dans le cas de la spirale, les deux secteurs élémentaires compris entre deux droites consécutives sont l'un plus petit, l'autre plus grand que la portion

de l'aire cherchée qui s'y trouve comprise. Dans le cas du conoïde parabolique, deux plans consécutifs comprennent deux cylindres élémentaires et une portion du solide moindre que l'un et plus grande que l'autre; et il en est de même des autres questions. Et ce n'est que parce que ces conditions sont remplies pour chaque élément qu'il est démontré qu'elles le sont pour les sommes.

Or il arrive souvent qu'en décomposant la grandeur en parties indéfiniment décroissantes, chacun de ces éléments ne peut facilement être démontré compris entre les deux éléments infiniment petits des sommes, d'espèce plus simple. C'est ce qui arriverait, par exemple, dans le cas du conoïde, si l'on donnait aux arêtes des cylindres une direction telle, qu'ils eussent toujours une partie en dedans et une partie en dehors de la portion de conoïde comprise entre leurs bases. On a pu éviter la difficulté dans ce cas; on ne le pourrait pas pour des solides de toutes les formes.

Or l'emploi des infiniment petits est aussi commode et aussi sûr dans tous les cas possibles, au moyen d'un principe très-simple que nous allons démontrer, et qui dispense de la considération des sommes et permet de s'occuper seulement d'un élément général.

### PRINCIPE FONDAMENTAL DES INFINIMENT PETITS.

376. *La limite de la somme ou du rapport de quantités infiniment petites n'est pas changée lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres, dont les rapports avec elles ont respectivement pour limites l'unité.*

1° Soient, en effet, les infiniment petits

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_m,$$

dont la somme tend vers une limite à mesure que leur

nombre augmente indéfiniment. Soient d'autres infiniment petits

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \ldots, \quad \beta_m,$$

tels, que les rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_m}{\beta_m}$$

aient tous pour limite l'unité.

On sait que, si l'on a une suite de rapports dont les termes soient considérés dans leur valeur absolue, ce qui est le cas que nous supposons ici, la somme des antécédents divisée par la somme des conséquents est comprise entre le plus petit et le plus grand de ces rapports. Il suit de là que le rapport

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_m}$$

sera compris entre le plus petit et le plus grand des premiers, et par conséquent aura aussi pour limite l'unité; d'où résulte nécessairement que la somme $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m$ a la même limite que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$. C. Q. F. D.

*Remarque.* — Si l'une des sommes était constante, l'autre aurait pour limite cette constante, sans quoi le rapport n'aura pas pour limite l'unité.

2° Supposons en second lieu qu'il s'agisse du rapport de deux infiniment petits $\alpha$, $\beta$; et soient $\alpha'$, $\beta'$ deux infiniment petits différents des premiers, mais tels, que les rapports $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\beta}$ aient pour limite l'unité; ce qui entraîn qu'il en est de même des rapports réciproques $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, puisqu'en général

$$\frac{a}{a'} = \frac{1}{\left(\frac{a'}{a}\right)}, \quad \text{d'où} \quad \lim \frac{a}{a'} = \frac{1}{\lim \frac{a'}{a}}.$$

Nous allons démontrer que la limite de $\frac{\alpha}{\beta}$ est la même que celle de $\frac{\alpha'}{\beta'}$.

En effet, on a identiquement

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right).$$

Les limites de ces deux variables égales sont égales ; et comme la limite d'un produit est le produit des limites des facteurs, et que la limite de chacun des deux facteurs $\frac{\beta'}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est l'unité, on aura

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

377. Le principe peut s'énoncer d'une autre manière, au moyen de la proposition suivante :

*Lorsque la limite du rapport de deux quantités est l'unité, leur différence est infiniment petite par rapport à l'une quelconque des deux;* c'est-à-dire que *le rapport de cette différence à l'une quelconque de ces quantités a pour limite zéro.*

Et réciproquement : *si la différence de deux quantités est infiniment petite par rapport à l'une d'elles, la limite de leur rapport est l'unité.*

Soient, en effet, $\alpha$ et $\alpha'$ deux quantités quelconques, et $\delta$ leur différence, on aura

$$\alpha = \alpha' + \delta,$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \frac{\delta}{\alpha'}.$$

Donc, si la limite de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est l'unité, celle de $\frac{\delta}{\alpha'}$ est zéro ; et ré-

ciproquement. Il est de plus évident que, si l'un des rapports $\frac{\delta}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\alpha'}$ tend vers zéro, il en est de même de l'autre, puisque $\delta$, étant la différence de $\alpha$ et $\alpha'$, est compris dans l'un une fois de plus seulement que dans l'autre.

Le principe fondamental peut donc s'énoncer de cette autre manière :

*La limite d'une somme ou d'un rapport d'infiniment petits n'est pas changée, quand on les remplace par d'autres qui en diffèrent respectivement de quantités infiniment petites par rapport à eux.*

*Remarque.* — Le grand avantage que l'on retire de ce principe consiste en ce qu'il permet souvent de négliger, dans les quantités infiniment petites, la partie qui en rend la comparaison et le calcul difficiles. Il suffit toujours que cette partie soit infiniment petite relativement à la quantité elle-même, et il n'en résulte aucune erreur dans les résultats où l'on n'a en vue que les limites des rapports ou des sommes de ces quantités infiniment petites.

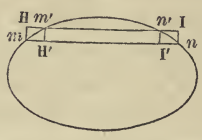
Nous allons en faire l'application aux questions générales les plus importantes de la Géométrie.

### COMMENT LES AIRES DES COURBES PLANES PEUVENT ÊTRE CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE SOMMES D'INFINIMENT PETITS.

378. *Sommes de parallélogrammes infiniment petits.* — Considérons une surface plane limitée par des arcs de courbes quelconques; divisons-la par un système de parallèles dont les distances soient dans des rapports arbitraires, mais tendent toutes vers zéro. La somme des aires comprises entre ces parallèles successives est toujours identique avec l'aire cherchée; et chacune de ces aires élémentaires offre la même difficulté que la proposée, puisqu'elle renferme des courbes dans son périmètre.

Mais si à chacune de ces aires élémentaires on supprime ou l'on ajoute des parties infiniment petites par rapport à ces aires respectives, et qui fassent disparaître la partie courbe de leur périmètre, la limite de la somme de ces nouvelles aires plus simples sera l'aire cherchée, d'après le principe général. Le moyen le plus commode d'obtenir ce résultat consiste à mener, par les extrémités de chacune des cordes, des parallèles à une même direction arbitraire, terminées à la corde suivante. Soient, en effet, $mn$, $m'n'$ deux parallèles consécutives quelconques : en menant par les extrémités $m'$, $n'$ (*fig.* 40) des parallèles $m'$H$'$, $n'$I$'$ à une direction choisie à volonté, on retranche les parties $n'$I$'n$,

Fig. 40.




$m'$H$'m$; en menant les parallèles $m$H, $n$I par les extrémités $m$, $n$, on ajouterait, au contraire, les parties $m$H$m'$, $nn'$I. Or, deux de ces quatre parties sont moindres que le parallélogramme $n$I$n'$I$'$, et les deux autres moindres que le parallélogramme $m$H $m'$H$'$; ces deux parallélogrammes sont infiniment petits par rapport au parallélogramme $m'$H$'$ $n'$I$'$, qui est moindre que le segment de la courbe, car leurs rapports à $m'$H$'$ $n'$I$'$ sont les mêmes que ceux de leurs bases $m$H$'$, $n$I$'$ à la base H$'$I$'$, et ces derniers tendent vers zéro, puisque, les parallèles $mn$, $m'n'$ se rapprochant indéfiniment, $m$H$'$ et $n$I$'$ tendent vers zéro, tandis que H$'$I$'$ reste fini. Il suit de là que les rapports des parallélogrammes HH$'$, II$'$ au segment de la courbe ont pour limite zéro ; il en est de même, à plus forte raison, des triangles formés par les arcs $mm'$, $nn'$, et, par conséquent, l'aire de la courbe est la limite de

la somme des parallélogrammes ayant pour bases les cordes parallèles, pour hauteurs leurs distances, et pouvant être entièrement intérieurs ou en partie extérieurs à cette aire.

On peut même remarquer qu'il n'est pas nécessaire que les sommets des parallélogrammes soient aux extrémités mêmes des cordes : il suffit qu'ils soient en des points infiniment voisins de ces extrémités ; il n'est même pas nécessaire que ces parallélogrammes soient contigus, pourvu que l'intervalle entre deux consécutifs soit infiniment petit par rapport aux hauteurs infiniment petites de ces parallélogrammes, car cela revient à retrancher de chaque élément une partie infiniment petite par rapport à lui-même. Cette considération générale, dont l'exactitude résulte du principe fondamental, s'applique à tout ce qui suit.

Pour abréger, nous représenterons une somme de termes ayant une même expression générale par le signe $\sum$ suivi de cette expression. Ainsi, $u$ désignant une corde quelconque, et $\alpha$ la distance de deux cordes consécutives, $\sum u\alpha$ représentera la somme des aires des parallélogrammes variables, et $\lim \sum u\alpha$ représentera la limite de leur somme, ou l'aire de la courbe.

379. *Sommes de trapèzes infiniment petits.* — Au lieu de supposer les lignes $m\mathrm{H}$, $m'\mathrm{H}'$, $n\mathrm{I}$, $n'\mathrm{I}'$ parallèles à une direction fixe, on pourrait les mener dans des directions différentes les unes des autres ; il suffit qu'elles fassent toujours un angle fini avec les cordes. En effet, la figure $n\mathrm{I}\,n'\mathrm{I}'$ deviendra un trapèze dont les bases $n'\mathrm{I}$, $n\mathrm{I}'$ seront infiniment petites, puisque les lignes $n'\mathrm{I}'$, $n\mathrm{I}$ font avec $mn$ des angles finis, et que la hauteur du trapèze est infiniment petite ; la mesure de ce trapèze a donc un rapport infiniment petit avec celle du trapèze intérieur $m'\mathrm{H}'n'\mathrm{I}'$, et, par conséquent, avec le segment même de la courbe. Il en

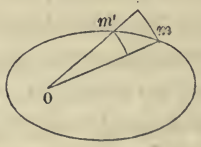
serait de même du trapèze $mHm'H'$. Si donc, au lieu de ce segment, on prend un des trapèzes ayant pour base $mn$, $m'n'$, $mI'$ ou $nH'$, on ne fait qu'ajouter ou retrancher à l'élément exact de l'aire cherchée une quantité infiniment petite par rapport à cet élément, et la limite de la somme de ces trapèzes sera précisément égale à la somme des éléments exacts de cette aire ou à cette aire elle-même.

Le cas le plus simple est celui des trapèzes inscrits dans le segment : les côtés non parallèles sont alors les cordes $mm'$, $nn'$. Il peut aussi être quelquefois utile de faire concourir toutes les lignes $mH$, $m'H'$, $nI$, $n'I'$ vers un même point; et c'est ce qu'a fait Archimède dans une de ses méthodes pour la quadrature de la parabole.

380. *Sommes de secteurs infiniment petits.* — Il n'est pas nécessaire de supposer parallèles les cordes qui divisent l'aire en éléments infiniment petits. On peut assujettir leurs directions à une loi quelconque, suivant les circonstances; la seule condition nécessaire est de n'ajouter ou retrancher à chaque élément exact qu'une quantité infiniment petite par rapport à lui.

Une des lois les plus simples est celle qui fait passer toutes les cordes par un même point. Soient O ce point (*fig.* 41),

Fig. 41.




et $Om$, $Om'$ deux sécantes faisant entre elles un angle infiniment petit; la somme des éléments $Om'm$ est identique avec l'aire cherchée, si le point O est dans son intérieur et que le contour n'offre pas de sinuosités; cette aire sera la

limite de la somme des aires que l'on obtiendra en ajoutant ou retranchant à chacun de ces éléments une quantité infiniment petite par rapport à lui.

Cette modification des éléments exacts, et qui a toujours pour objet de les simplifier, peut être faite de bien des manières différentes. On pourrait mener par $m$, $m'$ des droites, dans des directions déterminées, et substituer les triangles rectilignes à l'élément exact. On pourrait aussi, au lieu de lignes droites, mener des courbes arbitraires; mais ce qui est ordinairement le plus simple, c'est de décrire des arcs de cercle ayant O pour centre, et c'est ce qu'a fait Archimède dans sa quadrature de la spirale.

Il est facile de voir, en effet, que le rapport des deux secteurs circulaires semblables ayant pour rayons $Om$, $Om'$, étant celui des carrés de ces lignes, a pour limite l'unité, et que, par conséquent, leur différence est infiniment petite par rapport à ces secteurs. Or l'un de ces secteurs est compris entièrement dans l'élément $Om'm$, et celui-ci est compris entièrement dans l'autre secteur; car on peut supposer l'angle O assez petit pour que les rayons vecteurs de la courbe croissent ou décroissent constamment de $m$ en $m'$. Donc le rapport de chacun des deux secteurs à l'élément exact de l'aire a aussi pour limite l'unité; et l'aire cherchée est la limite de la somme des secteurs circulaires infiniment petits, intérieurs ou extérieurs.

Si le point O n'était pas dans l'intérieur de l'aire proposée, celle-ci serait la différence de deux aires auxquelles ce point appartiendrait, et que l'on considérerait séparément, comme on vient de le dire. Peut-être même y aurait-il plusieurs différences; cela dépend de la forme du contour. On pourrait aussi prendre la différence de deux secteurs compris entre les mêmes rayons, et chercher la limite de la somme de ces différences.

Au lieu de supposer que les cordes passent par un même

point, on pourrait les mener tangentes à une courbe donnée; on pourrait les assujettir à d'autres lois encore: toutes ces généralisations n'offrent aucune difficulté, quand on a bien saisi les principes précédents, et nous ne nous y arrêterons pas.

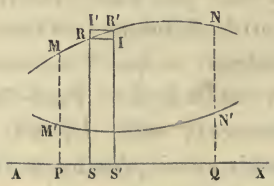
*Remarque.* — Lorsqu'on connaît la nature de la courbe qui termine la surface à évaluer, et le mode de décomposition en éléments infiniment petits, les quantités plus simples qu'on substitue à ces éléments peuvent s'exprimer par une même formule, et la question géométrique est ramenée à une sommation qui est du ressort de la science des nombres. Cette question, généralement très-difficile, se rapporte à des théories que nous ne nous proposons pas d'étudier ici; elles sont du ressort des Traités spéciaux de Calcul infinitésimal.

Néanmoins, nous donnerons ici quelques exemples simples de la méthode que nous venons d'exposer.

### COMMENT LES VOLUMES DES CORPS PEUVENT ÊTRE CONSIDÉRÉS COMME LIMITES DE SOMMES D'INFINIMENT PETITS.

381. *Solides de révolution.* — Supposons une surface plane quelconque tournant autour d'un axe AX (*fig.* 42)

Fig. 42.




situé dans son plan, et proposons-nous de calculer la portion du volume engendré qui sera comprise entre deux

plans quelconques perpendiculaires à AX. Ces plans peuvent être considérés comme engendrés par des perpendiculaires MP, NQ; les deux surfaces courbes qui terminent le volume à mesurer sont engendrées par des arcs de courbes données MN, M′N′, et ce volume est la différence de deux autres engendrés respectivement par les quadrilatères MNPQ, M′N′PQ. Bornons-nous donc au calcul d'un quelconque de ces derniers, par exemple à celui qu'engendre MNPQ.

Décomposons ce volume au moyen d'une suite de plans perpendiculaires à l'axe, infiniment voisins les uns des autres, et substituons à ces éléments, dont la somme est constamment égale à ce volume même, d'autres éléments d'une espèce plus simple et tels, que le rapport de chacun d'eux à son correspondant ait pour limite l'unité. La limite de la somme de ces nouveaux éléments indéfiniment décroissants sera, d'après le principe fondamental, la valeur exacte du volume à mesurer. Soient R, R′ deux points quelconques de MN, correspondant à deux plans sécants consécutifs; S, S′ leurs projections sur AX; on peut supposer SS′ assez petit pour que les perpendiculaires ou ordonnées varient dans un même sens, en passant de R à R′; d'où il suit que les deux rectangles RSS′I et R′S′SI′ engendreront autour de AX des cylindres dont l'un sera plus petit et l'autre plus grand que la partie du solide proposé comprise entre les deux plans sécants. Or, le rapport de ces deux cylindres de même hauteur est égal à celui de leurs bases ou des carrés de leurs rayons RS, R′S′; et à mesure que S′ se rapproche de S, le rapport des ordonnées RS, R′S′ se rapproche de l'unité, ainsi que celui de leurs carrés. Donc la limite du rapport des deux cylindres est l'unité; et il en est de même, à plus forte raison, pour le rapport d'un quelconque de ces cylindres au volume intermédiaire qui est l'élément exact du volume cherché.

Donc le volume engendré par MNPQ est la limite d'une somme de cylindres ayant pour hauteurs les parties infiniment petites dans lesquelles on décompose PQ, et pour rayons de leurs bases les ordonnées de MN correspondant aux points de division PQ.

Ces cylindres pourront être pris tantôt intérieurs, tantôt en partie extérieurs, sans que la limite de la somme soit changée, puisqu'ils satisfont toujours à la condition unique qu'ils doivent remplir.

Si l'aire génératrice n'est pas terminée à l'axe AX, mais à une seconde courbe M'N', le volume engendré sera la différence de deux autres qui rentrent dans le premier cas. On pourra aussi le considérer comme la limite de la différence des deux sommes de cylindres, ou de la somme des différences élémentaires correspondantes.

382. *Solides terminés par des surfaces quelconques.* — On concevra encore un système de plans parallèles, à des distances infiniment petites les uns des autres, et tels, que le solide entier que l'on veut mesurer soit compris entre le premier et le dernier; puis on cherchera à substituer à la partie comprise entre deux plans consécutifs quelconques un solide d'une espèce plus simple, et qui n'en diffère que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle. Or, s'il arrive qu'en menant, par tous les points du contour d'une des sections, des parallèles à une même direction, jusqu'au plan de l'autre, la projection ainsi effectuée de la première courbe soit tout entière comprise dans la seconde, le cylindre ainsi formé sera tout entier compris dans la tranche du solide située entre les deux plans. Au contraire, le cylindre formé par des parallèles à la même direction menée du contour de la seconde section au premier plan renfermera entièrement cette même tranche. Mais le rapport des deux cylindres de même hauteur est égal à celui

de leurs bases, lequel tend indéfiniment vers l'unité, à mesure que la distance des deux plans tend vers zéro. Donc le rapport des deux cylindres et, par suite, de la tranche du solide, à l'un quelconque d'entre eux, a pour limite l'unité, ou, en d'autres termes, chacun de ces cylindres diffère de l'élément exact du solide, d'une quantité infiniment petite par rapport à cet élément. Donc, enfin, *le volume proposé est limite d'une somme de cylindres ayant pour bases les sections du solide par des plans parallèles infiniment voisins, et pour hauteurs les distances de ces plans.*

Ce premier cas est celui de tous les corps auxquels Archimède a appliqué ce procédé dont on lui est redevable.

383. Mais il peut arriver que les parallèles menées par les points d'une des sections ne soient pas toutes intérieures, ou toutes extérieures à la tranche du solide ; et alors le raisonnement précédent ne suffirait pas : car, dans ce cas, aucun des deux cylindres infiniment petits ne serait avec évidence plus petit ou plus grand que le volume de la tranche exacte du corps. Mais on peut concevoir deux cylindres qui n'auraient pas pour bases les sections mêmes du corps, et tels, que l'un envelopperait entièrement la tranche, tandis que l'autre serait complétement intérieur; leurs bases tendraient indéfiniment à se confondre avec l'une des sections qui resterait fixe, tandis que l'autre s'en rapprocherait indéfiniment; et la coïncidence serait complète, si la distance des deux plans était réduite à sa limite zéro. Le rapport des deux bases des cylindres entre lesquels est comprise la tranche a donc pour limite l'unité; et l'on peut dire encore que *le volume d'un solide quelconque peut être regardé comme la limite d'une somme de cylindres infiniment petits, ayant pour bases les sections du solide par des plans parallèles infi-*

*niment voisins, et pour hauteurs les distances de ces plans.*

384. On pourrait encore considérer le solide comme décomposé par deux séries de plans parallèles infiniment voisins, et prendre les plans d'une des séries perpendiculaires aux plans de l'autre. Un élément du solide, compris entre deux plans consécutifs d'une série et deux plans consécutifs de l'autre, pourra être remplacé par un parallélépipède qui aurait pour base la section de ces quatre plans par un plan perpendiculaire aux plans des deux séries. En prenant pour hauteur de ce parallélépipède la longueur d'une quelconque des quatre cordes de la surface formées par les intersections des quatre plans, on aurait un solide dont le rapport à la partie exacte du proposé aurait pour limite l'unité.

Le volume cherché serait donc la limite d'une somme de parallélépipèdes dont les bases seraient des rectangles ayant leurs côtés infiniment petits.

# CHAPITRE VI.

## DE LA LONGUEUR DES LIGNES COURBES, ET DE L'AIRE DES SURFACES COURBES.

385. Nous avons dit que deux droites avaient même longueur, lorsqu'elles pouvaient coïncider, ou, en d'autres termes, lorsqu'elles étaient égales; ce n'est que de cette manière que le mot *longueur* s'est introduit dans notre langage, et nous nous sommes bien gardé de le définir. Et, de même, quand nous disons que la longueur d'une ligne surpasse celle d'une autre, cela signifie que la première ligne est plus grande que la seconde. On n'emploie jamais ce mot que quand il y a comparaison, et, quand on se borne à dire : la longueur d'une ligne, on entend toujours le rapport de cette ligne à l'unité.

Dans quel cas maintenant pourra-t-on dire que deux courbes ont même longueur, ou sont égales? C'est évidemment quand elles pourront coïncider. Or cela n'est possible que dans des cas très-particuliers, par exemple pour des arcs de cercles dont les rayons sont égaux : deux arcs de cercles de rayons différents ne peuvent donc être égaux, dans le sens reçu jusqu'ici; et si l'on veut pouvoir dire que, sans être superposables, ils sont équivalents en longueur, comme on a dit que des figures non superposables ont des surfaces équivalentes, il faut dire bien nettement ce que l'on entendra par là, et ne pas agir comme si l'on dissimulait une difficulté qui réellement n'existe pas, puisqu'il ne s'agira que d'être conséquent à la définition qu'on aura donnée.

Le terme de comparaison le plus simple à prendre étant la ligne droite, la question consistera à déterminer la droite que l'on dira de même longueur qu'une courbe donnée quelconque, ou à définir le rapport de la longueur de la courbe à l'unité, ou simplement ce que l'on appellera longueur de la courbe.

Or voici celle que nous adoptons :

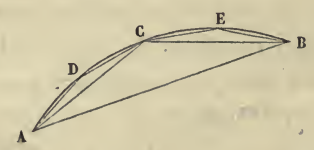
*La longueur d'une courbe donnée est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cette courbe, et dont les côtés tendent indéfiniment vers zéro.*

Mais cette définition n'aura un sens précis que quand on aura prouvé que cette limite existe et est unique, quelle que soit la loi suivant laquelle les côtés du polygone tendent vers zéro : c'est ce que nous allons faire.

Considérons un arc de courbe quelconque, et supposons-le, pour plus de simplicité, convexe dans toute son étendue, c'est-à-dire tel, qu'il ne puisse être coupé par une droite en plus de deux points : il en sera de même alors de tous les polygones inscrits. Si la courbe n'était pas dans ce cas, on la partagerait en parties pour chacune desquelles cette condition serait remplie; et pour chacune de ces parties on procéderait comme il suit.

Soit donc un arc convexe de courbe quelconque AB, et

Fig. 43.




adoptons, par exemple, la loi suivante pour l'inscription des polygones successifs : joignons aux deux points A et B le point C de la courbe, qui est également distant de l'un

et l'autre, et qui se trouve, par conséquent, à l'intersection de la courbe et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde AB. Joignons ensuite aux extrémités des arcs AC, CB les points D, E, qui sont respectivement équidistants de leurs extrémités; et continuons ainsi indéfiniment : le nombre des côtés se doublant toujours croîtra sans limite, et la grandeur de ces côtés tendra vers la limite zéro. Il y a maintenant deux observations importantes à faire :

D'abord les périmètres augmentent avec le nombre des côtés, puisqu'on remplace toujours un côté par deux autres terminés à ses extrémités, et donnant, par conséquent, une somme plus grande.

Ensuite le périmètre croissant ne peut dépasser toute grandeur; car il restera toujours moindre que le périmètre d'un polygone fixe enveloppant la courbe, et tracé arbitrairement. Or une grandeur toujours croissante, et qui ne peut atteindre une certaine valeur fixée, a nécessairement une limite déterminée, connue ou inconnue (*). Donc, *les*

(*) Pour ceux qui ne regarderaient pas cette proposition comme évidente, on peut faire le raisonnement suivant :

Soient A la valeur au-dessous de laquelle est toujours la variable, et B une de celles qu'elle prendra; qu'on partage l'intervalle de B à A en parties égales aussi petites que l'on voudra : la variable pourra bien dépasser tous les points de division, mais ne peut aller jusqu'à l'extrémité; il pourra aussi se faire qu'elle ne les dépasse pas tous, et alors il y en aura un qui sera le dernier qu'elle dépasse; elle restera donc toujours comprise entre celui-ci et le suivant, c'est-à-dire dans un intervalle aussi resserré qu'on l'aura voulu, et dans lequel elle ira toujours en croissant. En subdivisant cet intervalle en un nombre aussi grand qu'on voudra de parties égales, on reconnaîtra de même que la grandeur ne peut se trouver que dans un nouvel intervalle fixe entre B et A, et d'une étendue aussi voisine de zéro qu'on le voudra. Il existe donc une certaine valeur fixe entre B et A, dont la variable s'approche indéfiniment; elle a donc une limite. On démontrerait semblablement qu'une variable qui va toujours en décroissant, mais qui reste toujours au-dessus d'une certaine quantité fixe, a nécessairement une limite.

*périmètres des polygones inscrits dans la courbe, suivant la loi particulière que nous avons choisie, ont une limite;* ce qui était la première proposition à établir.

Reste à démontrer que l'on aura la même limite, quelle que soit la loi d'inscription des polygones, pourvu que leurs côtés tendent tous vers zéro.

Considérons, en effet, deux polygones inscrits ayant leurs côtés extrêmement petits, l'un appartenant à la série que nous venons de désigner, et le second correspondant à toute autre loi d'inscription : menons par tous les sommets de l'un et de l'autre des lignes parallèles à une même direction arbitraire, les deux périmètres seront partagés par ces lignes en un même nombre de parties; et celles qui seront comprises entre deux parallèles consécutives auront un rapport d'autant plus près de l'unité que les côtés seront plus petits; car leurs directions différant aussi peu qu'on voudra de celle de la tangente à la courbe, en l'une de leurs extrémités, l'angle qu'ils comprennent tendra vers zéro : et si l'on forme un triangle avec ces deux côtés comprenant cet angle, les deux autres angles tendront indéfiniment vers des valeurs infinies supplémentaires l'une de l'autre. Le rapport des côtés qui leur sont opposés est le même que ceux d'un triangle qui aurait les mêmes angles et dans lequel le côté correspondant à l'un des premiers resterait fini. Or, dans ce dernier, dont l'angle au sommet tend vers zéro, le second côté tend évidemment vers le premier et leur rapport vers l'unité; il en est donc de même du rapport des deux côtés infiniment petits du premier. Il suit de là, d'après le principe fondamental, que le rapport des deux périmètres tend vers l'unité à mesure que les côtés tendent vers zéro. La limite obtenue par le premier mode de subdivision est donc la même que pour tout autre. C. Q. F. D.

Il est bon d'observer qu'on trouverait encore la même

limite, si les sommets du polygone n'étaient pas sur la courbe même, mais en étaient infiniment voisins, et que les côtés eussent toujours pour limites de leurs directions celles des tangentes aux points infiniment voisins. On pourrait encore considérer les polygones circonscrits à la courbe : on pourrait même prendre une suite de lignes séparées les unes des autres. Imaginons, par exemple, des parallèles qui coupent l'arc de courbe et soient infiniment voisines les unes des autres : si, par chaque point de division, on mène une tangente, la suite discontinue des portions de ces tangentes comprises entre le point de contact et la parallèle voisine aura, d'après les raisonnements précédents, la même limite que le périmètre inscrit. Ce procédé a été employé par Fermat. On trouverait encore bien d'autres manières de parvenir à la même limite par des sommes de lignes droites; la seule condition nécessaire est que ces sommes et les périmètres inscrits se composent d'éléments correspondants dont le rapport ait l'unité pour limite. On aurait pu commencer par un polygone circonscrit et passer au suivant, en menant des tangentes par les points intermédiaires; on aurait ainsi un périmètre moindre. En continuant ainsi, les périmètres toujours décroissants, mais toujours supérieurs à une grandeur fixe, par exemple à une ligne brisée intérieure, ou même à la droite qui joint les extrémités, aurait une limite. Cela admis, tout ce qui précède s'ensuivrait.

*Remarques.* — Tout polygone circonscrit à un arc de courbe convexe est plus grand que cet arc.

Car si, entre deux points de contact consécutifs quelconques, on mène une tangente, il en résultera un polygone circonscrit d'un périmètre moindre que le précédent. En agissant de même pour ce nouveau polygone, et ainsi de suite indéfiniment, le périmètre de ces polygones va tou-

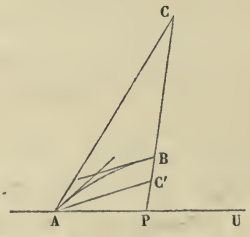
jours en diminuant et a pour limite la longueur de l'arc. Donc cette longueur est moindre que celle du polygone circonscrit quelconque d'où l'on est parti. Un raisonnement analogue prouve que la longueur de l'arc est plus grande que celle de tout polygone inscrit.

Il résulte de là que tout arc convexe est moindre qu'une ligne quelconque qui l'enveloppe, en partant des mêmes extrémités. Il suffit, en effet, de concevoir un polygone circonscrit au premier arc et ayant les côtés assez petits pour n'avoir aucun point commun avec le second et un polygone inscrit à celui-ci et qui enveloppe le premier. Ce dernier sera moindre que celui qui l'enveloppe, comme on le prouve dans la Géométrie élémentaire; donc, à plus forte raison, l'arc inscrit sera moindre que l'arc circonscrit au plus grand polygone.

Les cas les plus singuliers qu'on pourrait imaginer n'offriront aucune difficulté. On verrait de la même manière qu'une courbe convexe fermée est moindre que toute ligne qui l'enveloppe.

Voici encore une remarque qui n'est pas sans utilité. Soient AB (*fig.* 44) un arc convexe quelconque, AC une

Fig. 44.




droite menée de l'extrémité A et ayant même projection AP sur une ligne AU. Si toutes les tangentes de A en B forment avec AU des angles aigus plus petits que CAU, la

longueur AC sera plus grande que celle de l'arc AB. En effet, si l'on conçoit un polygone circonscrit à AB et dont les points de contact extrêmes soient A et B, il sera plus grand que l'arc; mais il sera plus petit que AC; car, si par tous les sommets on mène des parallèles à PBC, les parties de AC comprises entre ces parallèles seront plus grandes que les côtés correspondants du polygone, qui font avec AU des angles aigus plus petits; la ligne AC est donc plus grande que l'arc AB.

On verrait semblablement que, si les tangentes en tous les points de A et B font avec AU des angles aigus plus grands que CAU, la droite AC′ sera plus petite que l'arc AB. Car on pourrait inscrire dans l'arc un polygone dont les côtés auraient des directions assez voisines de celles des tangentes pour que leurs angles avec AU fussent plus grands que C′AU. Ce polygone serait alors plus grand que AC′, et, à plus forte raison, l'arc AB le serait aussi.

Il suit de là que la longueur de l'arc est comprise entre celles des deux tangentes comprises entre les parallèles extrêmes, et dont l'une est la plus inclinée de toutes, et l'autre la moins inclinée sur AU.

### DE L'AIRE DES SURFACES COURBES.

386. Les surfaces courbes ne pouvant coïncider que dans des cas très-particuliers, on ne pourrait établir aucune comparaison entre elles sous le rapport de l'étendue si l'on définissait par la superposition leur égalité en étendue.

La définition que nous donnerons de l'aire d'une surface courbe ramène à la considération des aires de surfaces planes, que l'on sait évaluer, et est tout à fait analogue à celle que nous avons donnée pour la longueur des lignes courbes.

Nous appellerons *aire* d'une surface courbe *la limite de l'aire d'un polyèdre inscrit dont les faces tendent indéfiniment vers zéro.*

Mais, pour que cette définition ait un sens précis, il faut démontrer qu'il y a une limite pour l'aire de ce polyèdre, et qu'elle est indépendante de la loi suivant laquelle ses faces tendent vers zéro.

Une notion préalable indispensable est celle du plan tangent. On démontre facilement que toutes les tangentes à une surface menées par un quelconque de ses points sont en général dans un même plan; et, par suite, que si, par ce point et deux autres infiniment voisins pris sur la surface et non en ligne droite avec lui, on fait passer un plan, ce plan tend vers une limite déterminée à mesure que les deux points variables se rapprochent du premier, et cette limite est le plan tangent.

Cela posé, concevons sur toute l'étendue de la surface en question des points à des distances infiniment petites les uns des autres; joignons-les par des lignes droites qui déterminent une suite continue de triangles inscrits, ayant tous leurs côtés infiniment petits. Subdivisons indéfiniment ces triangles en d'autres, en prenant par exemple les milieux d'arcs qu'on tracerait sur la surface entre les sommets du même triangle.

Concevons ensuite un polyèdre inscrit suivant toute autre loi et dont les faces décroissent indéfiniment, et comparons les surfaces de ces deux polyèdres. Pour cela, par toutes les arêtes du premier, menons des plans parallèles à une même droite; les trois qui partiront des côtés d'un quelconque des triangles comprendront entre eux une portion de la surface du second polyèdre qui sera plane ou composée de plusieurs parties non dans le même plan. Dans ce dernier cas, en menant de nouveaux plans par les arêtes de cette portion de surface et faisant de même pour

toutes les faces du premier polyèdre, les deux surfaces seront décomposées en portions planes ayant deux à deux même projection sur un plan perpendiculaire à tous ceux qui opèrent cette décomposition.

Or deux quelconques de ces surfaces correspondantes font avec le plan de projection des angles qui tendent à être égaux, puisque leurs directions sont infiniment voisines de celles d'un même plan tangent; leur rapport tend donc indéfiniment vers l'unité, et par conséquent il en est de même de leurs sommets ou des surfaces entières des polyèdres inscrits.

La loi suivant laquelle on détermine les sommets des polyèdres inscrits n'influe donc pas sur la limite, si elle existe, et il suffit de prouver qu'elle existe, soit pour une loi particulière d'inscription, soit pour une somme de faces obtenues par une autre voie, et telle, que son rapport avec la surface des polyèdres inscrits ait pour limite l'unité.

387. Concevons d'abord un plan tel, qu'en y projetant la portion de surface dont il s'agit il ne se trouve pas deux de ses points ayant même projection, ce qui est toujours possible en la subdivisant en parties qu'on considérera séparément. Supposons ensuite une série de plans parallèles entre eux, perpendiculaires au premier, et distants les uns des autres d'une quantité infiniment petite $\alpha$; puis une seconde série de plans parallèles distants les uns des autres d'une quantité infiniment petite $\beta$, perpendiculaires au premier plan, ainsi qu'à ceux de la première série. La surface proposée se trouvera décomposée en parties dont la projection sera égale au rectangle $\alpha\beta$, ou à une fraction de ce rectangle pour les parties voisines du contour. Dans chacune de ces parties, menons le plan tangent au point tel qu'il fasse le plus grand angle avec le plan de projection. Soit $\omega$ cet angle; si nous formons un triangle rectangle

dont l'angle à la base soit $\omega$, il y aura même rapport de l'hypoténuse à la base que de la portion de plan tangent qui se projette suivant $\alpha\beta$, à sa projection. Désignant ce rapport par $m$, la portion de plan tangent sera exprimée par $m\alpha\beta$.

Si maintenant on conçoit deux nouvelles séries de plans parallèles respectivement à ceux des précédentes, et partageant en deux parties égales l'intervalle de deux consécutifs quelconques, chaque portion de la surface se trouvera divisée en quatre autres. Dans chacune de ces nouvelles portions, nous mènerons de même le plan tangent faisant le plus grand angle avec le plan de projection, et les quatre portions de ces plans qui remplaceront celle qui se projetait dans le même espace $\alpha\beta$ formeront une somme moindre, puisque, pour trois d'entre elles, l'angle formé avec le plan de projection sera moindre que celui que formait le plan tangent dans le mode de division précédent.

En suivant indéfiniment le même procédé, la somme des portions indéfiniment décroissantes des plans tangents ira donc constamment en diminuant. De plus, elle sera toujours supérieure à une quantité fixe, par exemple la projection de la surface entière : donc elle a une limite. Or, les raisonnements faits pour deux polyèdres inscrits, ayant leurs faces infiniment petites dans tous les sens, s'appliquent à toute somme de faces infiniment petites donnant la même projection totale, et faisant, avec les plans des faces correspondantes, des angles ayant zéro pour limite. Donc la limite de la somme des portions discontinues de plans tangents que nous avons considérée est aussi celle de la surface de tous les polyèdres inscrits.

*Cette limite unique est ce que nous nommons l'aire de la surface courbe.*

388. Il est bon de remarquer qu'on trouverait encore la

même limite si, au lieu de s'assujettir à prendre des faces planes, on prenait des surfaces courbes variables telles, que pour les points situés sur une même ligne perpendiculaire au plan fixe de projection, les plans tangents à ces surfaces et à la proposée fissent entre eux des angles infiniment petits. Car les faces planes qu'on circonscrirait à ces surfaces auraient un rapport aussi près de l'unité qu'on voudrait, avec les parties de ces surfaces et de la proposée, correspondant à la même projection sur le plan fixe; on trouverait donc encore la même limite pour leur somme.

389. Enfin on reconnaîtrait, d'une manière analogue à ce qui a été fait pour les courbes, que toute surface convexe est plus petite qu'une surface qui l'enveloppe de toutes parts, ou qui l'enveloppe et est terminée au même contour.

Et de même, une surface courbe est moindre qu'une surface plane ayant même projection orthogonale sur un plan, et faisant avec ce plan un angle plus grand que tous ceux que font avec lui les plans tangents à la surface en tous ses points. L'inverse aurait lieu si tous ces derniers angles étaient au contraire plus grands que le premier.

# CHAPITRE VII.

## APPLICATION DE LA MÉTHODE DES LIMITES ET DE LA MÉTHODE INFINITÉSIMALE A QUELQUES QUESTIONS TRAITÉES PAR LES ANCIENS.

### COMPARAISON DES SURFACES DES CERCLES.

390. Nous prendrons pour premier exemple la question traitée précédemment par la méthode des anciens, et ayant pour objet de trouver le rapport des surfaces de deux cercles dont les rayons sont donnés.

En employant les mêmes notations et considérant les polygones inscrits dont les cercles sont les limites, on obtient, comme nous l'avons vu, la relation

$$\frac{P}{P'} = \frac{R^2}{R'^2},$$

qui a lieu constamment entre les aires variables P, P′ de ces polygones.

Or nous avons démontré généralement qu'on obtient une relation rigoureusement exacte entre les limites, en les substituant aux variables dans la relation trouvée entre ces dernières. On trouvera ainsi

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2},$$

ce qui prouve que deux cercles quelconques sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.

391. *Les circonférences de deux cercles quelconques sont entre elles comme leurs rayons.*

Cela résulte de ce qu'elles sont les limites des périmètres de polygones réguliers inscrits, et que ces périmètres sont entre eux comme les rayons des cercles, si l'on donne à ces polygones le même nombre de côtés.

Il en serait de même des portions de ces circonférences qui correspondraient à des angles égaux aux centres.

Il suit de là que le rapport de la circonférence au diamètre est le même pour tous les cercles. Archimède en a donné la valeur approchée. Il a montré qu'il est compris entre $3\frac{1}{7}$ et $3\frac{10}{71}$. Avant lui on ne s'était pas occupé de la longueur des lignes courbes. Euclide n'en parle pas, non plus que de l'aire des surfaces courbes.

C'est pour rendre possible la comparaison de ces grandeurs qu'Archimède a posé des principes qui sont encore admis dans l'enseignement, mais dont nous n'avons pas fait usage. Il nous a semblé bien préférable de partir des définitions que nous venons de faire connaître, pour la longueur des courbes et l'aire des surfaces courbes.

Les principes admis par Archimède consistent en ce que la ligne droite est plus petite que toute courbe ayant les mêmes extrémités; qu'une courbe concave vers la droite qui joint ses extrémités est plus courte que toute autre ligne qui l'enveloppe, et a les mêmes extrémités; qu'une surface plane est moindre que toute surface terminée au même contour; et, enfin, qu'une surface concave vers un même plan est moindre que toute autre surface qui l'enveloppe et est terminée au même contour.

Au moyen de ces principes, Archimède a pu résoudre un grand nombre de questions de la plus haute importance, qui n'avaient pu être abordées par les géomètres qui l'avaient précédé. Tout ce qui dépend de la longueur des courbes et de l'aire des surfaces courbes, c'est-à-dire une

grande partie de la Géométrie, se trouvait hors de la portée du raisonnement.

392. Le rapport de la circonférence au diamètre est d'une si grande importance, qu'après avoir démontré qu'il était incommensurable, on a cherché du moins à en approcher de manière à rendre l'erreur sans influence sensible. On a même été bien au delà des besoins de la pratique; on a eu la curiosité de connaître plus des cent cinquante premières décimales; et il est inutile de dire qu'on n'a jamais eu besoin d'employer une aussi grande approximation.

Dans les calculs on désigne le rapport, supposé exact, par la lettre $\pi$; de sorte que, si l'on appelle R le *rayon* d'un cercle, le rapport de sa circonférence à $2R$ sera $\pi$, et la circonférence sera exprimée par $2\pi R$.

393. Les angles au centre ayant entre eux le même rapport que les arcs compris entre leurs côtés, on pourrait prendre ces arcs mêmes, évalués en nombres, comme mesure des angles; il suffirait pour cela que l'angle pris pour unité interceptât entre ses côtés un arc égal à l'unité de longueur. Alors le nombre qui exprimerait un angle quelconque serait le même que celui qui exprimerait l'arc qu'il intercepte. Pour l'évaluation des arcs d'un cercle, l'unité la plus naturelle à choisir est le rayon lui-même; et les angles se trouvent mesurés par le rapport de l'arc au rayon, qui est indépendant du rayon choisi. Alors la demi-circonférence sera exprimée par $\pi$, et ce sera la mesure de deux angles droits : l'angle unité sera celui qui interceptera entre ses côtés un arc égal au rayon. On l'obtiendrait en degrés en faisant la proportion

$$\pi : 1 :: 180 : x,$$

d'où

$$x = \frac{180}{\pi},$$

nombre incommensurable qui exprime en degrés l'angle choisi pour unité dans le système où les angles sont mesurés par le rapport de l'arc au rayon. Ce système est employé toutes les fois qu'on n'a pas en vue la réduction immédiate des résultats du calcul en nombres.

394. *Surface du cercle.* — Le cercle étant considéré comme limite d'un polygone régulier circonscrit, sa mesure sera la limite de celle de ce polygone, ou le produit de la circonférence par la moitié du rayon, comme l'avait démontré Archimède.

Si R désigne le rayon, la circonférence sera $2\pi R$, et par conséquent la surface aura pour mesure $\pi R^2$.

Le nombre $\pi$ peut donc être considéré sous un second point de vue. Il est le rapport de la surface du cercle au carré de son rayon. On s'est servi de l'une et de l'autre de ces manières de l'envisager, pour procéder à la recherche de sa valeur approchée.

### COMPARAISON DES VOLUMES DES PYRAMIDES.

395. Après avoir ramené la comparaison des parallélépipèdes, et ensuite des prismes quelconques, à la considération de l'égalité, les anciens géomètres se sont trouvés arrêtés pour la comparaison des pyramides, soit entre elles, soit avec les prismes. Ils ont été obligés, pour y parvenir, d'avoir recours au même procédé que pour les cercles, et d'envisager la pyramide comme limite de quantités d'espèce plus simple.

Euclide commence par démontrer que toute pyramide triangulaire peut être décomposée en deux prismes triangulaires équivalents, dont l'un a pour base le quart de celle de la pyramide, et pour hauteur la moitié de celle de la pyramide ; et en outre de deux pyramides semblables à la

première, ayant leurs arêtes respectivement égales à la moitié de leurs correspondantes dans celle-ci. On reconnaît de plus immédiatement qu'une de ces pyramides est plus petite que l'un des prismes; de sorte que la somme des volumes des deux prismes est plus grande que la moitié du volume de la pyramide proposée.

D'après cela, si l'on répète une construction analogue dans chacune des deux nouvelles pyramides, les quatre pyramides qui resteront après qu'on en aura enlevé les prismes formeront une somme moindre que leur moitié : et, en continuant ainsi, on voit, par un raisonnement déjà employé, que l'on peut pousser l'opération assez loin pour que la somme des pyramides qui resteront après l'enlèvement successif de tous ces prismes forme un volume moindre que tout volume donné, proposition qui dans notre langage s'énoncera ainsi :

*Toute pyramide triangulaire peut être considérée comme la limite d'une somme de groupes de prismes triangulaires en nombre indéfini.*

On se rappellera que ceux d'un même groupe sont égaux entre eux; que leur nombre est double de ceux du groupe précédent, et leurs arêtes moitié moindres : d'où il résulte que la somme des prismes d'un même groupe est le quart de celle du groupe précédent.

396. *Deux pyramides de base équivalente et de même hauteur sont équivalentes.*

Pour comparer ces pyramides, Euclide commence par les considérer comme limites de sommes de prismes, au moyen de la décomposition que nous venons d'indiquer.

Or ceux qui composent les divers groupes sont équivalents dans les deux pyramides, qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales. Car les prismes du premier ordre auront par suite des bases équivalentes et même hau-

teur, et seront équivalents. La valeur du premier groupe étant la même dans les deux pyramides, celle du second qui en est le quart sera la même de part et d'autre, et ainsi de suite indéfiniment. La somme d'un même nombre de groupes sera donc la même des deux côtés, à partir du premier.

Ces deux sommes sont donc deux variables égales, ayant pour limites respectives les deux pyramides. Leurs limites ont donc des valeurs égales, ce qu'il fallait démontrer.

397. *Une pyramide triangulaire a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

En s'appuyant sur la proposition précédente, Euclide démontre facilement que toute pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme de même base et même hauteur. D'où il suit que la mesure du volume de la pyramide est le tiers de celle du prisme, qui est le produit de sa base par sa hauteur. De là résulte la proposition énoncée.

Et cela signifie que le rapport de ce volume au cube construit sur l'unité de longueur est le tiers du produit des deux nombres qui expriment respectivement les rapports de la base au carré fait sur l'unité de longueur et de la hauteur à cette dernière unité.

398. *Autre solution.* — La considération d'une pyramide, comme limite d'une série de groupes de prismes, a eu pour objet ici de comparer deux pyramides; mais on peut la faire servir directement à la mesure même de la pyramide.

En effet, si l'on désigne par $b$ et $h$ les nombres qui mesurent sa base et sa hauteur, chacun des deux premiers prismes aura pour mesure $\frac{bh}{8}$, et la valeur du premier groupe sera $\frac{bh}{4}$ : les groupes formeront par conséquent la

série suivante :

$$\frac{bh}{4}, \quad \frac{bh}{4.4}, \quad \frac{bh}{4.4.4}, \quad \ldots$$

C'est une progression géométrique dont Archimède a donné la formule de la somme, ainsi que sa limite qui est $\frac{bh}{3}$.

Or, dans le cas actuel, les variables sont la valeur de la somme des mesures des groupes, et la valeur de la somme des termes correspondants de la série. Les limites de ces deux variables, toujours égales, devant être égales, le volume de la pyramide aura pour mesure $\frac{bh}{3}$.

399. *Troisième solution de la même question.* — Pour donner un exemple des différentes manières dont une même grandeur peut être utilement considérée comme limite d'une variable, nous regarderons la pyramide comme limite, non plus de la somme des termes d'une série, mais d'une somme de quantités infiniment petites, et nous ferons usage du procédé général qu'Archimède a fait connaître.

Nous couperons la pyramide par une suite de plans parallèles à la base, et divisant la hauteur en parties égales indéfiniment décroissantes. Nous considérons chacune des sections triangulaires comme la base d'un prisme ayant ses arêtes parallèles à l'une de celles de la pyramide, dirigées vers le plan de la base, et terminées au plan parallèle voisin ; la somme de ces prismes sera moindre que la pyramide. En dirigeant les arêtes en sens contraire, on aurait une somme de prismes plus grande que la pyramide. Ces deux sommes se composeront des mêmes prismes, à l'exception du plus grand, qui sera l'excès de la somme des prismes extérieurs sur l'autre ; cet excès sera un prisme ayant la base de la pyramide, et une hauteur égale à une des subdivisions de

la hauteur de la pyramide. Il peut donc devenir moindre que tout volume donné, et par conséquent, à plus forte raison, la différence de chacune des sommes à la pyramide peut devenir moindre que toute grandeur donnée; la pyramide est donc la limite de l'une ou de l'autre de ces sommes.

Il ne reste donc plus qu'à calculer la somme des volumes des prismes qui composent l'une des deux, par exemple la plus grande, et en prendre la limite; ce sera la mesure de la limite de cette somme ou de la pyramide.

Soient $m$ le nombre des divisions de la hauteur, $\alpha$ l'une d'elles, on aura

$$h = m\alpha.$$

Soit $n$ le nombre des divisions comprises entre le sommet de la pyramide et la base inférieure de l'un quelconque des prismes, cette base sera mesurée par $\frac{bn^2}{m^2}$ et le volume du prisme sera $\frac{\alpha bn^2}{m^2}$; la somme des prismes en question sera donc

$$\frac{\alpha b}{m^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2).$$

Or Archimède a démontré la formule suivante:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{1.2.3}.$$

La somme des prismes sera donc

$$\frac{\alpha b(m+1)(2m+1)}{1.2.3.m},$$

ou, en remplaçant $\alpha$ par $\frac{h}{m}$,

$$\frac{bh}{1.2.3}\,\frac{(m+1)(2m+1)}{m^2},$$

dont la limite est $\frac{bh}{3}$, qui sera par conséquent égale à la valeur de la limite de la somme des prismes, ou de la pyramide.

400. *Mesure du segment parabolique.* — Archimède considère d'abord cette surface comme composée d'un triangle plus grand que la moitié, plus de deux segments dans lesquels il fait la même décomposition, et continue ainsi indéfiniment; la somme de tous ces triangles aura pour limite l'aire du segment proposé. Or tous les triangles d'un même groupe forment une somme égale à $\frac{1}{4}$ du précédent; ces groupes forment donc une progression ayant pour raison $\frac{1}{4}$, dont on trouvera la somme et la limite de cette somme par la formule donnée par Archimède, à cette occasion même; et c'est ainsi qu'il a démontré que le segment parabolique est égal aux $\frac{4}{3}$ du triangle ayant même base et même sommet que ce segment.

Ce grand géomètre a donné une autre solution de ce même problème, en considérant le segment cherché comme la limite d'une somme de trapèzes infiniment petits. Nous nous dispenserons de la rapporter ici.

401. *Volume du cylindre.* — Dans ce cas, il n'est nécessaire de recourir ni aux séries ni aux infiniment petits. On reconnaît, en effet, immédiatement que ce volume est compris entre ceux de deux prismes qui auraient même hauteur que le cylindre et pour bases des polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cercle de base du cylindre. Or ces prismes, ayant même hauteur, sont dans le même rapport que leurs bases, et le rapport de ces bases est égal à celui des carrés des rayons des cercles qui leur sont inscrits, et a par conséquent pour limite

l'unité, quand le nombre des côtés de ces polygones augmente indéfiniment. Le rapport des deux prismes a donc aussi pour limite l'unité, et, par conséquent, le rapport de l'un ou de l'autre au cylindre qui est compris entre eux a pour limite l'unité.

Il est donc démontré que le volume du cylindre est la limite du volume des prismes inscrits ou circonscrits. Or ces prismes ont pour mesure le produit de leur base par leur hauteur. Le cylindre a donc pour mesure le produit de cette hauteur par la limite de ces bases, c'est-à-dire *le produit du cercle qui lui sert de base par sa hauteur*.

402. *Volume du cône.* — On reconnaît avec la même facilité que le volume d'un cône est compris entre ceux de pyramides ayant même sommet que ce cône, et pour bases des polygones réguliers semblables inscrits et circonscrits au cercle de base. Or ces pyramides ont pour mesure le tiers de leur hauteur multiplié par leurs bases, qui ont pour limite commune la base du cône. Il en résulte que le rapport de ces pyramides a pour limite l'unité, et que, par conséquent, il en est de même de leur rapport au cône compris entre elles.

Le cône est donc la limite des pyramides inscrites ou circonscrites, et, par conséquent, a pour mesure la limite de la mesure de ces pyramides, c'est-à-dire *le tiers du produit de sa hauteur par sa base.*

403. Le volume d'un tronc de cône à bases parallèles s'en déduit facilement, puisqu'il n'est autre chose que la différence de deux cônes.

On peut aussi ramener sa détermination à celle du tronc de pyramide, en remarquant qu'un cône est équivalent à une pyramide triangulaire de même hauteur et de base équivalente.

404. *Surface du cylindre.* — La surface du prisme dont les bases sont des polygones inscrits dans celles du cylindre, et dont les côtés diminuent indéfiniment, a pour limite celle du cylindre; car tous les points de ses faces se rapprochent indéfiniment des points de cette surface, et leurs directions de celles des plans tangents. Or la somme de ces faces a pour mesure le périmètre du polygone inscrit multiplié par la hauteur du cylindre. La surface convexe du cylindre aura donc pour mesure la limite de cette expression, ou le produit de la hauteur du cylindre par la circonférence de sa base.

405. On pourrait ramener la démonstration à la forme la plus ordinairement suivie, en faisant usage des principes d'Archimède que nous avons précédemment démontrés.

En effet, la surface convexe du prisme inscrit est moindre que la surface convexe du cylindre augmentée des segments du cercle qui ont pour bases les côtés du polygone inscrit, puisque chaque face plane du prisme est moindre que la surface terminée à son contour, et composée de la partie sous-tendue du cylindre et des deux segments adjacents.

Et de même la surface du cylindre est plus petite que la surface d'un prisme ayant pour base un polygone circonscrit semblable à celui qui est inscrit, augmentée des segments compris entre la circonférence du cercle et les côtés de ce polygone.

Ainsi la surface du cylindre est plus grande que celle d'un prisme inscrit, diminuée d'une quantité dont la limite est zéro, et plus petite que celle d'un prisme circonscrit, augmentée d'une quantité dont la limite est zéro. Elle est donc la limite de l'une ou de l'autre de ces expressions dont la différence tend vers zéro, et est par conséquent la limite des surfaces des prismes inscrits ou circonscrits; ce qui ramène au résultat déjà obtenu.

406. *Surface du cône.* — Si l'on considère deux pyramides ayant même sommet que le cône, et pour bases des polygones semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cercle de base, la surface du cône sera la limite vers laquelle tendront ces surfaces lorsque le nombre des côtés de ces polygones augmentera indéfiniment.

Cela résulte de ce que nous avons établi en général; mais on s'en assurerait encore au moyen des principes d'Archimède : il suffirait de construire un système symétrique du premier par rapport au plan de la base; on aurait alors un double cône et de doubles pyramides dont l'une envelopperait la surface du double cône, et serait par conséquent plus grande, tandis que l'autre serait enveloppée par lui, et serait par conséquent plus petite. Et comme le même rapport existe entre les moitiés de ces trois surfaces qu'entre ces trois surfaces elles-mêmes, il s'ensuit que la surface du cône est comprise entre celles des deux pyramides, dont il est facile de voir que le rapport a pour limite l'unité : elle est donc la limite des surfaces des pyramides inscrites ou circonscrites; d'où l'on conclut facilement que la surface courbe du cône a pour mesure *la moitié du produit de la circonférence de sa base par son côté.*

407. *Surface de la sphère.* — Si l'on conçoit un demi-polygone régulier inscrit dans la demi-circonférence d'un grand cercle, et qu'on le fasse tourner autour du diamètre qui passe par ses extrémités, il engendrera une surface qui, d'après la théorie générale que nous avons établie, aura pour limite la surface de la sphère lorsque le nombre des côtés du polygone augmentera indéfiniment.

C'est ce que l'on démontrerait encore d'après les principes d'Archimède, en concevant la surface qui serait engendrée par le polygone circonscrit semblable. La surface de la sphère serait comprise entre les deux, et comme les

mesures de ces deux surfaces montrent qu'elles se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre, il s'ensuit qu'elles ont pour limite commune la surface constante de la sphère.

On déduit de là que la surface de la sphère est égale à la circonférence d'un de ses grands cercles, multipliée par son diamètre, et égale, par conséquent, *à quatre fois la surface d'un grand cercle.*

408. La mesure de la surface d'une zone s'obtiendrait semblablement, d'après notre théorie.

Mais, en se servant des principes d'Archimède, il ne suffirait pas de considérer les surfaces engendrées par une portion de polygone à côtés égaux, inscrits dans l'arc qui engendrerait la zone, et par un périmètre circonscrit semblable; car la surface de la zone ne serait pas complétement enveloppée par cette dernière. On remédie à cet inconvénient par une considération ingénieuse due à Archimède, et dont on ne fait pas assez usage. Elle consiste à mener une tangente à l'extrémité de l'arc que décrit la zone et à substituer le tronc de cône que décrit la portion de cette tangente, terminée au polygone circonscrit, à celui que décrit la portion de celui-ci qu'elle remplace. On a ainsi une portion de polygone qui engendre une surface qui enveloppe entièrement la zone, et il est facile de reconnaître qu'elle est moindre que celle qu'engendrerait le polygone semblable à celui qui est inscrit. La zone est donc comprise entre les surfaces engendrées par ces deux polygones semblables, dont elle sera la limite. Toute difficulté est ainsi levée.

409. *Volume de la sphère.* — Ce volume peut être considéré comme limite de celui qui serait engendré par un polygone régulier inscrit dans un demi-grand cercle, et tournant autour du diamètre qui passe par les deux extrémités de ce demi-cercle. Or on trouve facilement que ce dernier

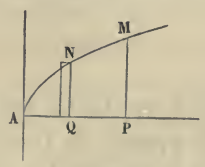
volume est mesuré par le produit du tiers du rayon du grand cercle par quatre fois la surface du cercle inscrit dans le polygone. La sphère, qui en est la limite, aura donc pour mesure la limite de ce produit, c'est-à-dire le produit du tiers de son rayon par quatre fois la surface d'un de ses grands cercles, *ou par la surface même de la sphère.*

410. On trouverait de même la mesure du volume d'un secteur sphérique, ou du volume de la portion de la sphère comprise entre deux plans parallèles.

411. *Volume du conoïde parabolique.* — Archimède a donné la mesure de segments quelconques des corps engendrés par la révolution d'une section conique autour d'un de ses axes. Il les considère tous comme limites de sommes de cylindres infiniment petits. Nous nous bornerons à considérer le cas de la parabole, et nous supposerons que la base du segment soit perpendiculaire à l'axe.

Si nous partageons la hauteur AP (*fig.* 45) en un nombre $m$ de parties égales $\alpha$ ; que par tous les points de division nous menions des plans perpendiculaires à l'axe ;

Fig. 45.




que sur les cercles d'intersection comme bases nous construisions des cylindres terminés respectivement au plan précédent et au suivant, la somme des cylindres dirigés dans le sens de l'axe sera plus petite que le volume cherché, et la somme de ceux qui sont dans l'autre sens sera plus grande. Or la différence de ces deux sommes est le cylindre

dont la base est celle du segment même, et la hauteur $\alpha$ ; et cette différence peut devenir moindre que toute grandeur donnée, en donnant une valeur assez grande à $m$; il en est de même, à plus forte raison, de la différence de l'une ou de l'autre des deux sommes au segment, qui est, par conséquent, la limite de l'une et de l'autre. Cela posé, il faut trouver la valeur de l'une d'elles, par exemple de la plus grande, qui se compose de $m$ cylindres. On sait qu'un cylindre a pour mesure le produit de la surface de sa base par sa hauteur. Celui dont la base est à la distance AQ du sommet A aura donc pour mesure

$$\pi \overline{\mathrm{NQ}}^2 \alpha.$$

Or, en désignant par $2p$ le paramètre de la parabole, on a

$$\overline{\mathrm{NQ}}^2 = 2p\,\mathrm{AQ}.$$

et, si $n$ est le nombre entier de subdivisions contenues dans AQ, on aura

$$\mathrm{AQ} = n\alpha;$$

le volume du cylindre aura donc pour expression

$$2\pi p n \alpha^2.$$

En faisant passer $n$ par toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à $m$, et faisant la somme de toutes ces expressions, on aura pour mesure de la somme des cylindres

$$2\pi p \alpha^2 (1 + 2 + 3 + \ldots + m),$$

ou

$$\pi p \alpha^2 m (m + 1)$$

ou

$$\pi p . m\alpha (m\alpha + \alpha) = \pi p . \mathrm{AP} (\mathrm{AP} + \alpha),$$

dont la limite est

$$\pi p . \overline{AP}^2,$$

lorsque $\alpha$ tend vers zéro.

Cette limite est donc égale à la mesure de la limite de la somme des cylindres, c'est-à-dire du segment proposé.

On peut lui donner une autre forme en remarquant que

$$\overline{MP}^2 = 2p . AP,$$

et l'on obtient ainsi

$$\pi \overline{MP}^2 \frac{AP}{2};$$

c'est-à-dire que le segment du conoïde parabolique est égal au produit de la surface de sa base par la moité de sa hauteur.

Ce segment est donc la moitié du cylindre de même base et même hauteur, ou encore trois fois la moitié du cône de même base et même hauteur : c'est sous cette dernière forme qu'Archimède a présenté ce théorème.

412. *Surface de la spirale d'Archimède.* — Dans cette courbe les rayons partant d'un point fixe, ou *pôle*, croissent proportionnellement à l'angle qu'ils forment avec une droite fixe ; de sorte qu'en désignant cet angle par $\theta$, et le rayon par $r$, on a

$$r = a\theta,$$

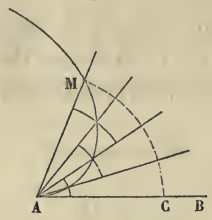
$a$ étant une constante donnée.

Soit proposé d'évaluer l'aire comprise entre la droite fixe AB, l'arc AM et le rayon AM (*fig.* 46). Archimède la considère comme limite d'une somme de secteurs circulaires, obtenus comme il suit.

Il partage d'abord l'angle MAB en deux parties égales, puis chacune des moitiés en deux parties égales, et de même chacun des nouveaux angles en deux parties égales, et ainsi de suite indéfiniment. Par chacun des points de

rencontre avec la courbe, il décrit des arcs de cercle, du centre A, jusqu'à la rencontre avec la droite qui précède et

Fig. 46.




celle qui suit : il forme de cette manière une suite de secteurs circulaires, les uns plus petits, les autres plus grands que la partie de l'aire cherchée comprise entre les mêmes droites. Il suit de là que l'aire totale est comprise entre les deux sommes de secteurs, et que par conséquent la différence qui existe entre elle et chacune de ces sommes est moindre que celle de ces deux sommes entre elles. Or il est visible que cette dernière n'est autre chose que le secteur circulaire dont le rayon est AM, et l'angle au centre, la subdivision de l'angle MAB qui décroît indéfiniment. Il suit de là que la différence des deux sommes entre elles, et à plus forte raison la différence de chacune d'elles à l'aire cherchée, peut devenir moindre que toute quantité donnée.

Cette conclusion d'Archimède se traduit ainsi dans notre langage :

L'aire cherchée AMA est la limite de l'une ou de l'autre des deux sommes de secteurs circulaires.

La question est donc ramenée à l'évaluation d'une surface composée de surfaces plus simples que la proposée ; et c'est ce qui doit nous occuper maintenant.

Désignons par $m$ le nombre des subdivisions de l'angle $\theta$, par $\alpha$ la valeur de l'une d'elles, nous aurons

$$\theta = m\alpha.$$

Soit $n\alpha$ l'angle formé avec AB par le rayon d'un quelconque des secteurs, ce rayon aura pour valeur $an\alpha$; le cercle entier décrit de ce rayon aurait donc pour surface $\pi a^2 n^2 \alpha^2$, et par conséquent le secteur aura pour mesure cette expression, multipliée par le rapport de $\alpha$ à quatre angles droits, que nous représenterons par $\frac{\alpha}{4D}$; on obtiendra ainsi

$$\frac{\pi a^2 n^2 \alpha^3}{4D}.$$

Cela posé, pour avoir l'une des sommes des secteurs, par exemple la plus grande, il faudra donner à $n$ toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à $m$ dans l'expression précédente, et ajouter les résultats, ce qui donnera

$$\frac{\pi a^2 \alpha^3}{4D}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2).$$

Or, c'est à cette occasion qu'Archimède a cherché la formule de la somme des carrés des nombres naturels, que nous avons déjà eu occasion d'appliquer. Cette formule pour les nombres de 1 à $m$ est, comme nous l'avons dit,

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{1.2.3}.$$

L'expression de la somme des secteurs deviendra ainsi

$$\frac{\pi a^2}{4D}\,\frac{m\alpha(m\alpha+\alpha)(2m\alpha+\alpha)}{1.2.3},$$

et, remplaçant $m\alpha$ par sa valeur $\theta$,

$$\frac{\pi a^2}{4D}\,\frac{\theta(\theta+\alpha)(2\theta+\alpha)}{1.2.3}.$$

Maintenant que nous avons l'expression générale de la variable, dont la limite est la quantité cherchée, nous savons qu'il suffit, pour avoir la mesure de celle-ci, de rem-

placer dans l'autre les variables par leurs limites. Or la seule variable qui y entre est $\alpha$, dont la limite est zéro. L'aire cherchée a donc pour mesure

$$\frac{\pi a^2}{4D}\,\frac{\theta^3}{3}.$$

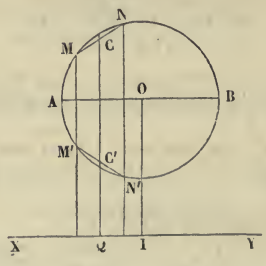
Telle est l'expression à laquelle conduit la formule de notre calcul; mais il est facile de lui donner la forme même suivant laquelle Archimède l'a présentée.

En effet, $\alpha^2\theta^2$ est le carré du rayon extrême AM, et $\pi\overline{AM}^2$ est la surface du cercle de rayon AM; l'expression précédente est donc équivalente au tiers du cercle AM multiplié par $\frac{\theta}{4D}$, c'est-à-dire au tiers du secteur circulaire MAC.

413. *Surface du tore.* — Le tore est le solide engendré par un cercle qui tourne autour d'une droite située dans son plan.

Soient O le centre de ce cercle, AB le diamètre parallèle à l'axe de révolution XY (*fig.* 47); AMN . . . B . . . N'A un polygone d'un nombre pair de côtés, inscrit dans le cercle;

Fig. 47.




MN, M'N' deux quelconques de ses côtés, symétriques par rapport à AB; C, C' leurs milieux.

Les surfaces des troncs de cônes engendrés par MN et M'N' auront respectivement pour mesures

$$2\pi CQ.MN \quad \text{et} \quad 2\pi C'Q.M'N',$$

dont la somme est

$$2\pi MN(CQ + C'Q) \quad \text{ou} \quad 4\pi OI.MN,$$

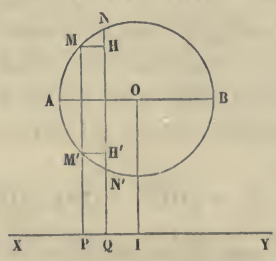
puisque

$$CQ + C'Q = 2OI.$$

Cette somme étant indépendante de la position des deux côtés symétriques, il suffira de la répéter autant de fois qu'il y a de côtés compris dans la demi-circonférence, pour avoir la mesure de la surface totale engendrée par le périmètre du polygone. On obtiendra ainsi $4\pi OI$ multiplié par le demi-périmètre. La limite vers laquelle tend ce produit, quand le nombre des côtés augmente indéfiniment, sera $4\pi OI$ multiplié par la demi-circonférence du cercle, ou le produit de la circonférence du cercle générateur par $2\pi OI$, qui mesure la circonférence que décrit son centre. Telle est l'expression de la surface du tore.

414. *Volume du tore.* — Concevons le cercle décomposé par des perpendiculaires à l'axe XY (*fig.* 48), dont la distance diminue indéfiniment; la partie du volume cherché, qui sera engendrée par la surface MNM'N' comprise

Fig. 48.




entre deux parallèles consécutives, ne différera de celle engendrée par le rectangle MM'H'H que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même; d'où il suit que le

volume cherché peut être considéré comme la limite de la somme de ceux qu'engendreront tous les rectangles compris entre les parallèles prises depuis A jusqu'à B.

Or le volume engendré par MM'H'H est la différence de deux cylindres dont les mesures respectives sont

$$\pi\overline{MP}^2 . MH \quad \text{et} \quad \pi\overline{M'P}^2 . MH,$$

et donnent pour différence

$$\pi MH\left(\overline{MP}^2 - \overline{M'P}^2\right) \quad \text{ou} \quad \pi MH\,(MP - M'P)\,(MP + M'P),$$

ou enfin

$$2\pi OI . MH . MM'.$$

Mais MH.MM' est l'aire du rectangle MM'H'H, et la somme de ces aires a pour limite celle du cercle. Le volume du tore aura donc pour mesure $2\pi$OI, multiplié par la surface du cercle, c'est-à-dire le *produit de cette surface par la circonférence décrite par le centre.*

415. *Volume engendré par un segment de cercle tournant autour de sa corde.* — Soient (*fig.* 49) CMD le segment, AB le diamètre parallèle à la corde, OI la distance de ces deux droites; MPQ, M'P'Q' deux perpendiculaires à CD, infiniment voisines l'une de l'autre; le volume cherché sera la limite de la somme des cylindres engendrés par les rectangles, tels que MP', pris depuis C jusqu'à D.

L'expression générale de ces cylindres sera

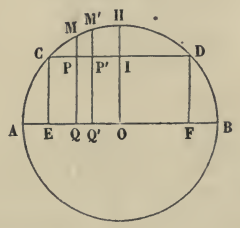
$$\pi\overline{MP}^2 . PP' \quad \text{ou} \quad \pi\left(\overline{MQ}^2 - 2MQ . PQ + \overline{PQ}^2\right) PP';$$

et il ne s'agit plus que de prendre les limites des sommes relatives à ces trois termes.

La première, ou la limite de la somme des éléments $\pi\overline{MQ}^2 . PP'$, sera la mesure de la portion de la sphère de

diamètre AB, comprise entre les deux plans perpendiculaires à AB, menés par les extrémités de la corde CD; nous la supposons connue.

Fig. 49.




La seconde est égale à $2\pi$ PQ, ou la circonférence dont le rayon est OI, multipliée par la limite de la somme des produits tels que MQ.PP', ou par l'aire ECHDF.

La troisième est le cylindre dont le rayon de la base est OI et la hauteur CD.

Si OI est nul, on aura la sphère même.

# NOTE SUR L'ÉQUIVALENCE.

416. Lorsqu'une grandeur est décomposable en parties égales à une certaine unité ou à ses subdivisions, la détermination de sa mesure n'offre aucune difficulté; mais cette circonstance se présente très-rarement.

Elle a lieu dans le cas d'un rectangle dont les côtés ont une mesure commune avec l'unité de longueur; les autres figures rectilignes ne la présentent généralement pas.

Pour pouvoir les comparer sous le rapport de l'étendue superficielle qu'elles renferment, on a introduit la considération de l'équivalence, et l'on a regardé comme égales, sous le rapport de la surface, des figures qui résultaient de l'addition de figures respectivement égales et arrangées dans un ordre différent; ou encore de figures égales retranchées diversement de figures égales; ou enfin qui résultaient de la division de figures équivalentes en un même nombre de parties égales.

A la rigueur, il faudrait que ces différents cas fussent réductibles à un seul, par exemple à la décomposition en parties respectivement égales, qui constituerait la définition de l'équivalence, et à laquelle on ramènerait les autres cas par des raisonnements rigoureux.

Les difficultés que cela présenterait, et la disposition qu'on a naturellement à regarder les grandeurs de même espèce comme susceptibles d'être représentées par des nombres, et soumises aux mêmes opérations, ont engagé sans

doute les géomètres à admettre ces propositions sans difficulté. Mais, comme toutes les considérations sur l'équivalence précèdent la mesure des grandeurs et ont même pour but d'y conduire, on ne peut commencer par s'appuyer sur la possibilité de cette mesure. Et nous croyons que, de même que nous avons appelé égales des pluralités correspondant aux mêmes objets distincts, dans quelque ordre qu'ils soient placés, il serait convenable de n'appeler égales en surface que des figures composées d'autres figures respectivement égales, mais placées dans un ordre différent. De cette manière, tout serait ramené à la seule idée fondamentale de l'égalité, soit que le nombre des parties respectivement égales dans lesquelles on décompose les figures fût limité, ou illimité.

On donnerait alors de l'équivalence la définition suivante :

*Deux grandeurs d'espèce quelconque sont dites* équivalentes, *quand elles sont composées de parties respectivement égales, ou qu'elles sont limites de grandeurs composées de parties respectivement égales.*

Il est presque inutile de faire remarquer que deux grandeurs rentreraient dans cette définition, si les parties qui les composent n'étaient pas respectivement égales, mais donnaient des parties respectivement égales par des déplacements et des groupements convenables. Car les grandeurs ainsi déformées restent équivalentes à ce qu'elles étaient d'abord, comme composées de parties égales, et elles sont devenues équivalentes entre elles, puisqu'elles se trouvent alors composées de parties respectivement égales.

417. Si l'on évalue avec une même unité les différentes parties qui composent deux grandeurs équivalentes, on trouvera des nombres respectivement les mêmes, et dont les sommes, qui sont les mesures de ces grandeurs, seront

par conséquent les mêmes. Les grandeurs totales seront donc exprimées par les mêmes nombres. Et réciproquement, si les mêmes nombres sont la mesure de deux grandeurs, elles sont composées des mêmes parties égales soit à l'unité, soit à ses subdivisions, en nombre limité ou illimité; ces deux grandeurs satisfont donc à la condition d'équivalence.

418. Voyons maintenant comment les propositions élémentaires se démontreront, en restant rigoureusement fidèles à cette nouvelle définition.

*Deux parallélogrammes de même base et même hauteur sont équivalents.*

Pour le démontrer, plaçons ces deux parallélogrammes de manière que leurs bases inférieures coïncident, en AB par exemple (*fig.* 50); les bases supérieures seront respectivement en A′B′, A″B″ sur une même parallèle à AB.

Fig. 50.

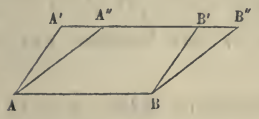
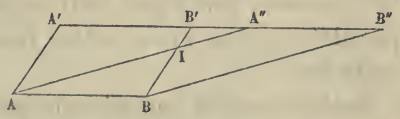



Fig. 51.




Nous considérerons d'abord le cas où le point A″ sera entre A′ et B′. Alors il est visible que les deux parallélogrammes se composent d'une partie égale ABA″B′, et d'une seconde partie, égale de part et d'autre, le triangle AA′A″ pour le premier, et BB′B″ pour le second; donc, dans ce premier cas, les deux parallélogrammes sont équivalents.

Mais on ne pourrait faire les mêmes raisonnements si A″ était en dehors de A′B′, c'est-à-dire si la droite AA″ coupait BB′ en un point I entre B et B′ (*fig.* 51). Pour ramener ce cas au premier, partageons BB′ en parties égales moindres que BI, et, par les points de division, menons des

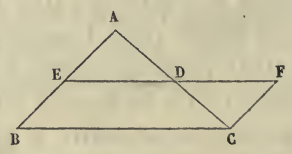
parallèles à AB qui diviseront les deux parallélogrammes en un même nombre de parallélogrammes égaux. Or les deux premiers qui ont la base commune AB se trouveront dans le premier cas, et par conséquent seront composés de parties respectivement égales. Il en sera donc de même des autres parallélogrammes qui composent les deux proposés, puisqu'ils sont respectivement égaux aux premiers; et par conséquent aussi ceux-ci sont composés de parties respectivement égales, et par suite sont équivalents.

La mesure du parallélogramme est ainsi ramenée à celle du rectangle, qui n'offre aucune difficulté, puisqu'il peut être exactement épuisé au moyen du carré de l'unité de longueur et de ses subdivisions successives, si toutefois il existe une commune mesure entre ses côtés et l'unité. Sinon, le parallélogramme ne pourrait être considéré que comme limite d'une surface commensurable, et sa mesure serait un nombre incommensurable.

419. La mesure du triangle résulte de celle du parallélogramme, parce que tout triangle est équivalent à un parallélogramme ayant même base et une hauteur moitié moindre.

Soient, en effet, un triangle quelconque ABC (*fig.* 52). Si, par le milieu D d'un de ses côtés AC, on mène une parallèle DE à BC et par C une parallèle CF à BA, les deux

Fig. 52.




triangles AED, CDF seront égaux, et par conséquent le triangle ABC se composera des mêmes parties que le paral-

lélogramme BEF, qui a la même base BC que le triangle, et une hauteur moitié moindre.

420. La mesure du polygone étant la somme de celles des triangles qui le composent se ramène donc aussi au rectangle, et l'on retombe ainsi sur tout ce qui avait été établi précédemment sur la mesure des surfaces planes terminées par des lignes droites.

Et tout ce qui se rapporte à la mesure des surfaces planes terminées par des lignes courbes ne différerait en rien de ce que nous en avons déjà dit, puisqu'il ne s'agit toujours que de les considérer comme limites de sommes de figures terminées par des lignes droites.

421. Les principes admis comme évidents, au premier point de vue de l'équivalence, résultent bien simplement de ce qui précède.

En effet, des grandeurs équivalentes sont des limites de sommes exprimées par des nombres égaux. Si donc de surfaces équivalentes on retranche des surfaces équivalentes, les restes seront mesurés par les mêmes nombres et seront par conséquent équivalents.

Et de même, si l'on divise une surface en plusieurs parties équivalentes, ces parties seront exprimées par des nombres égaux entre eux, et par conséquent égaux à celui qui exprime la surface divisée par le nombre des parties. Donc, si l'on partageait une surface équivalente à la première en un même nombre de parties égales, elles seraient exprimées par les mêmes nombres que celles de la première surface et leur seraient par conséquent équivalentes.

*Remarque.*—Il peut arriver qu'en portant à la suite les unes des autres des unités ou des subdivisions de l'unité, on n'épuise jamais complétement une grandeur, et que cela devienne possible par un simple déplacement des parties qui la composent. Par exemple, un parallélogramme dont

la base et la hauteur ont une commune mesure avec l'unité ne pourrait être épuisé complétement au moyen des subdivisions de l'unité de surface, quelque loin qu'elles soient poussées. Mais, comme nous l'avons dit, si l'on élève des perpendiculaires aux extrémités de la base du parallélogramme, on formera deux triangles rectangles tels, qu'en déplaçant celui qui fait partie du parallélogramme et le substituant à l'autre, on obtiendra un rectangle composé des deux mêmes parties que le parallélogramme et susceptible d'être exactement évalué au moyen du carré construit sur la commune mesure de la base et de la hauteur avec l'unité.

Si l'on n'opérait pas ce déplacement, le parallélogramme ne pourrait être considéré que comme limite d'une somme de parties indéfiniment décroissantes; cette somme serait exprimée par un nombre variable dont la limite serait la mesure du parallélogramme et coïnciderait avec le nombre plus simplement obtenu au moyen du déplacement du triangle.

422. Ainsi un rectangle exactement mesurable au moyen d'une certaine unité peut être divisé en parties de forme quelconque, comme des cercles, des triangles, des figures terminées par des contours curvilignes arbitraires. Si l'on déplaçait ces diverses parties, ou si l'on voulait les évaluer séparément, on ne pourrait le faire qu'en les considérant comme des limites de sommes, donnant lieu à des limites de nombres. Ces dernières pourraient être commensurables ou incommensurables, et leur somme produirait identiquement le même nombre que l'on aurait obtenu par la mesure directe du rectangle proposé.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

QA
9
D84
1885
ptie.2

Duhamel, Jean Marie Constant
Des méthodes dans les
sciences de raisonnement

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY